



David Manuel Ribeiro Negrão

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

**Otimização de forma de inclusões em
microestruturas de material celular utilizando a
Superformula**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Pedro Samuel Gonçalves Coelho, Professor
Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade NOVA de Lisboa

Júri

Presidente: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso
Arguente: Prof. Doutor José Arnaldo Pereira Leite Miranda Guedes
Vogal: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

setembro, 2018

Otimização de forma de inclusões em microestruturas de material celular utilizando a Superformula

Copyright © David Manuel Ribeiro Negrão, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

"An equation has no meaning for me if it does not express a thought of God".

Ramanujan

Agradecimentos

Primeiramente gostava de agradecer ao Prof. Dr. Pedro Coelho, professor da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL) e orientador desta dissertação, por me ter dado um voto de confiança e por me ter introduzido neste tema de investigação. Estou-lhe muito grato por toda a disponibilidade e dedicação que tornou possível a realização deste trabalho e pelas discussões esclarecedores que tivemos sobre o tema da otimização estrutural. Gostava também de agradecer por todo o conhecimento transmitido e motivação dada.

Ao Prof. Dr. João Cardoso, professor da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL), agradeço todo o interesse demonstrado pela minha dissertação, o tempo que me concedeu da sua atenção e as ajudas pontuais quando alguma dúvida me surgiu. Agradeço não só o apoio evidenciado durante a realização da minha dissertação, mas também ao longo de quase todos os anos do meu percurso académico.

Gostava também de agradecer a todos os professores do Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial da FCT-UNL, pela excelente formação que me foi dada e por disponibilizarem as instalações e equipamento necessário para a realização desta dissertação.

Agradeço a todos os meus familiares, especialmente aos meus pais e avós, por todo o apoio incondicional que sempre me transmitiram, pelo investimento que desde sempre fizeram em mim, permitindo-me ter a oportunidade de estudar e obter uma formação académica, sem eles não seria a pessoa que sou hoje. Às minhas irmãs que sempre me fizeram acreditar nas minhas capacidades. À minha namorada, por toda a disponibilidade para me ouvir e aconselhar, e por todos os bons momentos que me ajudaram a ultrapassar todas as dificuldades e obstáculos que surgiram ao longo desta caminhada.

Por último, mas com igual importância, gostava de agradecer aos meus amigos, em especial aqueles com quem tive o privilégio de partilhar este percurso académico, pelas trocas de ideias, pelo companheirismo que demonstraram e por criarem sempre um ambiente de apoio mútuo, essencial à realização de todo este trabalho.

Resumo

A presente dissertação tem como principal objetivo a otimização de forma de inclusões em microestruturas periódicas de material compósito. Estes materiais são de extrema importância em aplicações de mecânica estrutural, sobretudo em aplicações que procuram um compromisso mais exigente, entre peso baixo e resistência mecânica elevada.

O modelo de material utilizado neste trabalho, é um modelo bidimensional onde o meio heterogêneo é gerado através da repetição de uma célula de base em duas direções espaciais. Trata-se de um modelo de material poroso de duas fases (sólido e vazio). Posteriormente, no desenvolvimento deste trabalho também é abordada a teoria da homogeneização que converte um meio heterogêneo, num meio homogêneo equivalente com propriedades mecânicas homogeneizadas.

Na realização desta dissertação são estudadas várias microestruturas ótimas obtidas através da resolução de três problemas de otimização de forma. Estes problemas são formulados como a minimização da *compliance*, minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão e minimização do máximo da tensão de von-Mises com constrangimentos de tensão. Neste trabalho são consideradas duas equações distintas para descrever a forma das inclusões. A primeira parametrização utilizada considera uma descrição geométrica da fronteira mais rígida sendo que as inclusões são modeladas pela equação da superelipse. Posteriormente é utilizada uma parametrização muito mais flexível onde as curvas das inclusões são descritas pela equação da superformula.

Os resultados mostram que a melhor maneira de formular o problema de otimização de forma é através da minimização do máximo da tensão de von-Mises com constrangimentos de tensão. Além disso demonstra-se que a utilização da equação da superformula para descrever a forma das inclusões, permite obter microestruturas ótimas que aproximam as condições de otimalidade com uma qualidade de resultados bastante elevada.

Palavras-chave: Otimização de forma, material celular, microestruturas, superelipse, superformula, homogeneização

Abstract

The present dissertation aims to optimize the holes's shape in periodic microstructures of composite material. These materials are extremely important in structural mechanics, having greater relevance in applications that are intended to have a more demanding commitment between lightweight and high mechanical resistance.

The material model employed in this work, it is a two-dimensional one where the heterogeneous domain is generated through repetition of a unit-cell in two spatial directions. This is a porous material model of two phases (solid and void). Later in this work, the homogenization theory which converts a heterogeneous domain into an equivalent homogeneous one with homogenised mechanical properties will also be addressed.

During the execution of this thesis, several optimal microstructures resulting from solving three shape optimization problems are studied. These problems are formulated as the *compliance* minimization, *compliance* minimization with stress constraints and minimization of the maximum von-Mises stress with stress constraints. In this work, two distinct equations are considered to describe the holes's shape. The first parameterization used contemplates a geometrical description of the more rigid boundary, which is the one where the holes are modelled by the super-ellipse equation. The second parameterization used is a much more flexible one, where the holes's boundaries are described by the superformula equation.

The results show that the best way to formulate the shape optimization problem is through the minimization of the maximum von-Mises stress with stress constraints. Besides that, it is also shown that using the superformula equation to describe the holes's shape allows the obtainment of optimum microstructures that approximate optimality conditions with high quality results.

Keywords: Shape optimization, cellular material , microstructures, superellipse, superformula, homogenisation

Índice

Índice de Figuras	xv
Índice de Tabelas	xix
Simbologia e notações	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos da Dissertação	2
1.2 Estrutura da Dissertação	3
2 Estado da arte	5
2.1 Otimização estrutural	5
2.1.1 Otimização dimensional	6
2.1.2 Otimização de forma	7
2.1.3 Otimização topológica	7
2.2 Materiais compósitos	9
2.2.1 Constituição dos materiais compósitos	9
2.2.2 Classificação dos materiais compósitos	10
2.2.3 Comportamento mecânico dos materiais compósitos	11
2.3 Algumas aplicações	12
2.3.1 Materiais auxéticos	13
2.3.2 Scaffolds	14
2.4 Revisão de problemas clássicos	15
3 Análise e otimização de material	19
3.1 Equações de elasticidade	19
3.1.1 Equações de equilíbrio	20
3.1.2 Equações de compatibilidade das deformações	21
3.1.3 Equações constitutivas para o comportamento linear elástico	22
3.1.4 Classes de simetria dos tensores constitutivos	24
3.1.5 Tensão equivalente de von-Mises	25
3.2 Modelo de material	26
3.3 Homogeneização	27

3.4	Problema de otimização	30
3.4.1	Algoritmo de otimização	33
3.4.1.1	Quasi-Newton	34
3.4.1.2	Programação quadrática sequencial	36
3.4.2	Avaliação de erro	38
3.4.3	Resolução de equações não lineares	39
3.4.4	Gradiente numérico	39
3.4.5	Integração numérica	40
4	Parametrização da forma da inclusão	43
4.1	Superelipse	43
4.2	Superformula	45
4.3	Metodologia para determinar a área de inclusões geradas pela k-type Gielis Formula	47
5	Resultados	49
5.1	Formas ótimas	49
5.1.1	Minimização da <i>compliance</i>	49
5.1.1.1	Carregamento biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2$)	49
5.1.1.2	Carregamento biaxial ($\sigma_1 = 2\sigma_2$)	53
5.1.1.3	Carregamento de corte ($\sigma_1 = -\sigma_2$)	57
5.1.2	Minimização da <i>compliance</i> com constrangimentos de tensão	61
5.1.2.1	Carregamento biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2$)	61
5.1.2.2	Carregamento biaxial ($\sigma_1 = 2\sigma_2$)	63
5.1.3	Minimização do máximo da tensão	65
5.1.3.1	Carregamento biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2$)	65
5.1.3.2	Carregamento biaxial ($\sigma_1 = 2\sigma_2$)	69
5.2	Formas ótimas obtidas pela teoria da homogeneização	73
5.3	Comparação e discussão dos resultados	75
6	Conclusões e desenvolvimentos futuros	77
	Referências bibliográficas	81
A	Classes de simetria	85
B	Resultados do capítulo 5	89
B.1	Parâmetros da equação da superelipse	89
B.2	Parâmetros da equação da superformula	90
B.3	Parâmetros da k-type Gielis Formula	92
C	Minimização do máximo da tensão para um carregamento de corte	95

Índice de Figuras

2.1	Categorias de otimização estrutural associadas às várias etapas do projeto, extraído de [9].	6
2.2	Exemplo de otimização dimensional, adaptado de [3].	7
2.3	Exemplo de otimização de forma, extraído de [3].	7
2.4	Ground structure de domínio retangular de 15 nós, extraído de [3].	8
2.5	Exemplo de otimização topológica, extraído de [3].	8
2.6	Aumento da utilização da percentagem de materiais compósitos, na construção das aeronaves da AIRBUS, adaptado de AIRBUS (2015).	12
2.7	Do lado esquerdo está representada a deformação de um material não auxético, quando sujeito a uma tensão de tração na sua direção axial. Do lado direito está representada a deformação de um material auxético, quando sujeito a uma tensão de tração na sua direção axial, extraído de [13].	13
2.8	Material com coeficiente de Poisson negativo, extraído de [1].	14
2.9	Suporte biomimético para correção de um defeito no fémur, extraído de [35].	15
2.10	Evolução da microestrutura de Vigdergauz, para diferentes rácios das tensões macroscópicas aplicadas, extraído de [20].	17
2.11	Representação da forma ótima das inclusões para varias frações volúmicas de material $V = 0.2(1), 0.4(2), 0.6(3), 0.8(4)$. a) Rácio de tensões macroscópicas unitário, ($\sigma_1 = \sigma_2$); b) Rácio de tensões macroscópicas unitário, ($\sigma_1 = -\sigma_2$), extraído de [33].	17
2.12	Cronologia das principais contribuições que servem de base ao plano de trabalho desta dissertação.	18
3.1	Diagrama de Tonti para o problema de elasticidade linear.	20
3.2	Classes de simetria consoante o aumento sucessivo de planos de simetria, extraído de [6].	24
3.3	Modelo de material de material celular poroso de microestrutura periódica, com dimensão característica do domínio macroscópico D e uma célula de base com dimensão característica d , adaptado de [8].	26
3.4	Padrão periódico de 5×5 células de base.	27
3.5	Representação esquemática do método da homogeneização, extraído de [1].	28

3.6	Representação esquemática da hipótese de periodicidade infinita no domínio microscópico e macroscópico, extraído de [1]	29
3.7	Descrição do problema de otimização de forma da microestrutura de um material compósito celular.	30
3.8	Fluxograma do algoritmo de otimização de forma, utilizado para resolver os problemas de otimização do presente trabalho.	33
3.9	Fluxograma do algoritmo quasi-Newton.	36
3.10	Fluxograma do algoritmo SQP.	38
4.1	Parametrização da forma de uma inclusão num domínio rectangular, utilizando três variáveis de projeto (a, b, η) , adaptado de [27].	44
4.2	Exemplos de curvas descritas pela equação da superformula: a) formas com $m = 4$ e $n_1 = n_2 = n_3 = n$; b) formas com diferente simetria rotacional, $a = b = 1$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 30$; c) Formas com diferente curvatura, $m = 5$, $a = b = 1$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 100$; extraído de [26].	46
4.3	Divisão do domínio da k-type Gielis Formula em vários subintervalos.	47
4.4	<i>Design</i> inicial da célula de base, para resolver o problema da minimização da <i>compliance</i> com um carregamento de corte.	48
5.1	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_2 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da superellipse . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.	52
5.2	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_2 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da superformula . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.	52
5.3	Sobreposição das formas ótimas obtidas através da equação da superellipse e da superformula para o problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = \sigma_2$).	53
5.4	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_2 = 2\sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da superellipse . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.	56
5.5	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_2 = 2\sigma_2$) para inclusões descrita pela k-type Gielis Formula , com $k = 2$. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.	56
5.6	Sobreposição das formas ótimas obtidas através da equação da superellipse e da k-type Gielis Formula , com $k = 2$ para o problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).	57

5.7	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_2 = -\sigma_2$) para inclusões descrita pela intersecção de duas superelipses . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.	58
5.8	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_2 = -\sigma_2$) para inclusões descrita pela intersecção de duas superformulas . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.	58
5.9	Sobreposição das formas ótimas obtidas através da intersecção de duas superelipses e duas superformulas para o problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = -\sigma_2$).	61
5.10	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> com constrangimentos de tensão ($\sigma_2 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela superformula . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.	63
5.11	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> com constrangimentos de tensão ($\sigma_2 = 2\sigma_2$) para inclusões descritas pela k-type Gielis Formula , com $k = 2$. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.	65
5.12	Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da superelipse . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.	68
5.13	Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da superformula . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.	68
5.14	Sobreposição das formas ótimas obtidas através da equação da superelipse e da superformula para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$).	69
5.15	Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_2 = 2\sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da superelipse . a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.	72
5.16	Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_2 = 2\sigma_2$) para inclusões descritas pela k-type Gielis Formula , com $k = 2$. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.	72
5.17	Sobreposição das formas ótimas obtidas através da equação da superelipse e da k-type Gielis Formula , com $k = 2$ para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).	73

6.1	Esquema da célula de base constituída por dois materiais isotrópicos e homogêneos distintos (E_1 e E_2).	78
6.2	Representação da tensão máxima de von-Mises em função do módulo de elasticidade do material da coroa E_2 e do parâmetro δ	79
6.3	Representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] para todo o domínio do material celular e para diferentes células de base pertencentes a este.	80
C.1	Distribuição de tensão de von-Mises [MPa] obtidas considerando um carregamento de corte e utilizando a intersecção de duas superelipses para definir a forma das inclusões. a) Minimização da <i>compliance</i> . b) Minimização do máximo da tensão.	95
C.2	Distribuição de tensão de von-Mises [MPa] obtida considerando um carregamento de corte e utilizando a intersecção de duas superformulas para definir a forma da inclusão central e uma superformula para definir as inclusões da fronteira.	96

Índice de Tabelas

3.1	Tensores de tensão e deformação e respetiva notação reduzida.	23
3.2	Algoritmo geral de otimização para problemas não estrangidos e constrangidos.	34
5.1	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = \sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da superellipse para definir a forma das inclusões.	50
5.2	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = \sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da superformula para definir a forma das inclusões.	51
5.3	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da superellipse para definir a forma das inclusões.	54
5.4	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da k-type Gielis Formula , com $k = 2$, para definir a forma das inclusões.	55
5.5	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = -\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da intersecção de duas superellipses para definir a forma das inclusões.	59
5.6	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = -\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da intersecção de duas superformulas para definir a forma das inclusões.	60
5.7	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = -\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da superformula para definir a forma das inclusões.	62

5.8	Solução do problema da minimização da <i>compliance</i> com constrangimentos de tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da k-type Gielis Formula , com $k = 2$, para definir a forma das inclusões.	64
5.9	Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da superellipse para definir a forma das inclusões.	66
5.10	Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da superformula para definir a forma das inclusões.	67
5.11	Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da superellipse para definir a forma das inclusões.	70
5.12	Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da k-type Gielis Formula , com $k = 2$, para definir a forma das inclusões.	71
5.13	Solução do problema da minimização do máximo da tensão aplicando a teoria da homogeneização e representação da respetiva distribuição da tensão de von-Mises [MPa] considerando uma fração volúmica de material de 60%. . .	74
B.1	Parâmetros da equação da superellipse, para o problema da minimização da <i>compliance</i> . a) $\sigma_1 = \sigma_2$. b) $\sigma_1 = 2\sigma_2$	89
B.2	Parâmetros da equação da superellipse, para o problema da minimização do máximo da tensão. a) $\sigma_1 = \sigma_2$. b) $\sigma_1 = 2\sigma_2$	89
B.3	Parâmetros da equação da superellipse, para o problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = -\sigma_2$).	90
B.4	Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = \sigma_2$).	90
B.5	Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização da <i>compliance</i> com constrangimentos de tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$).	90
B.6	Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$).	91
B.7	Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = -\sigma_2$).	91
B.8	Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$), aplicando a teoria da homogeneização.	91

B.9	Parâmetros da k-type Gielis Formula, com $k = 2$, para o problema da minimização da <i>compliance</i> ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).	92
B.10	Parâmetros da k-type Gielis Formula, com $k = 2$, para o problema da minimização da <i>compliance</i> com constrangimentos de tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).	92
B.11	Parâmetros da k-type Gielis Formula, com $k = 2$, para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).	93
B.12	Parâmetros da k-type Gielis Formula, com $k = 2$, para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$), aplicando a teoria da homogeneização.	93

Simbologia e notações

Latim

- D Dimensão característica do domínio macroscópico.
- d Dimensão característica do domínio microscópico.
- E Módulo de elasticidade do material dos elementos da fase sólida.
- E_{ijkl} Tensor de elasticidade ou rigidez.
- E_{ijkl}^0 Tensor de elasticidade ou rigidez do material base da microestrutura.
- E_{ijkl}^H Tensor de elasticidade ou rigidez homogeneizado.
- g_i Constrangimentos de desigualdade.
- h_i Constrangimentos de igualdade.
- L Função Lagrangeana.
- n Fator de escala.
- V Fração volúmica de material.
- Y Domínio microscópico.

Grego

- Γ_u Fronteira do domínio macroscópico onde os deslocamentos são imposto.
- Γ_t Fronteira do domínio macroscópico onde as forças de superfície são impostas.
- δ_{ij} Delta de Kronecker.
- ε Coeficiente homotético.
- ε_{ij} Tensor das deformações.
- λ_g Multiplicador de Lagrange associado a um constrangimento de desigualdade.

λ_h Multiplicador de Lagrange associado a um constrangimento de igualdade.

ν Coeficiente de Poisson do material.

σ_{ij} Tensor das tensões.

Ω Domínio macroscópico.

$\partial\Omega$ Fronteira do domínio macroscópico.

Abreviaturas

APDL Ansys Parametric Design Language

ESP Equi-Stress Principle

EVR Elemento de Volume Representativo

KKT Karush-Kuhn Tucker conditions

MEF Método dos Elementos Finitos

MMA Method of Moving Asymptotes

QP Quadratic Programming

SIMP Solid Isotropic Material with Penalisation

SQP Sequential Quadratic Programming

Capítulo 1

Introdução

Percorrendo os diversos campos da engenharia, em todos eles está presente um departamento de projeto, onde se encontra em foco a análise e otimização de estruturas. Durante os últimos anos, a análise e otimização de estruturas tem constituído um tópico de bastante interesse ao nível da investigação científica, sendo esta uma área que está em contínuo desenvolvimento, por ter uma enorme variedade de aplicações em projetos de engenharia.

Normalmente, num projeto de engenharia é necessário realizar análises estruturais de modo a obter respostas e características mecânicas de estruturas sujeitas a determinados carregamentos (como por exemplo, tensões ou deslocamentos). Os resultados da análise estrutural são usados para verificar se as estruturas têm aptidão para suportar determinados carregamentos, tendo em conta os requisitos do projeto. Para este efeito recorre-se a modelos analíticos, numéricos ou experimentais, sendo estes últimos difíceis de executar na maior parte dos casos. Os modelos analíticos baseiam-se na descrição analítica de fenómenos físicos, através de formulações matemáticas, o que faz com que estes modelos apresentem soluções exatas dos problemas. A resolução deste tipo de problemas depende da complexidade das equação que governam o sistema físico em questão, deste modo os modelos analíticos são apenas utilizados para resolver problemas descritos por equações acessíveis, definidas em domínios de geometrias simples.

Devido aos desenvolvimentos na área da computação, a utilização de métodos numéricos para resolver problemas de análise estrutural, tem sido cada vez mais frequente. Entre estes destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) que é um método variacional. Neste método considera-se que um determinado domínio complexo é decomposto em vários subdomínios que permitem simplificar a formulação do problema, pois é mais fácil representar uma função complexa como uma composição de funções polinomiais simples, com um erro tão pequeno quanto se pretenda, bastando para isso aumentar o número de subdomínios. Explicando por outras palavras, este método discretiza um domínio complexo em vários elementos discretos, e a resposta da estrutura é aproximada

pela resposta individual de cada elemento. Resumindo o MEF é uma ferramenta da engenharia bastante importante, capaz de resolver problemas reais, envolvendo geometrias, comportamentos físicos e condições de fronteira complexas. Na presente dissertação é utilizado o *software* ANSYS para a modelação de estruturas através da aproximação pelo modelo de elementos finitos.

A otimização é o processo de seleção da melhor solução de um conjunto de várias hipóteses. A sua ideia básica, consiste na maximização ou minimização de uma função objetivo, dependente de variáveis contínuas ou discretas, de modo a encontrar um ponto ótimo, que resulte no melhor desempenho do sistema, sem que os respetivos constrangimentos sejam violados. Posteriormente, devido ao avanço tecnológico a nível da informática e ao desenvolvimento dos métodos numéricos de análises de estruturas, surgiu a otimização estrutural que é uma disciplina que abrange um conjunto de métodos e teorias que procuram obter a estrutura que desempenha mais eficientemente a função pretendida. Esta dissertação tem um grande ênfase na análise e otimização de materiais compósitos de microestrutura periódica.

Os materiais compósitos são caracterizados por serem resultado da combinação de dois ou mais materiais a uma escala macroscópica, isto é, podem ser distinguidos visualmente, dando origem a um novo material com melhores propriedades mecânicas, do que os seus constituintes. Os materiais compósitos tentam aproveitar as virtudes de cada uma das suas fases, de modo a que estes ofereçam na sua utilização diferentes propriedades das encontradas nos seus constituintes considerados isoladamente. A utilização destes tipo de materiais, tem vindo a ser cada vez mais intensa na mecânica estrutural, sobretudo em aplicações que procurem um compromisso bastante exigente entre peso baixo e resistência mecânica elevada. Neste trabalho considera-se uma classe de materiais compósitos particular que é a de microestrutura periódica, onde a mais pequena heterogeneidade do meio é gerada através da repetição de uma célula de base que é repetida em duas direções do espaço. A célula de base é constituída por uma inclusão de vazio que é embebida numa matriz de material isotrópico e homogéneo. A forma desta inclusão na célula de base, e consequentemente, a geometria da célula de base, é objeto de estudo desta dissertação, do ponto de vista da sua optimalidade para uma medida de desempenho pretendida para o material.

1.1 Objetivos da Dissertação

O principal objetivo da presente dissertação é contribuir e acrescentar valor para o conhecimento científico, que incide na área da análise e projeto ótimo de materiais compósitos, particularmente materiais celulares (fases sólido/vazio) de microestrutura periódica, aplicando a otimização de forma de estruturas a três problemas de otimização. Primeiro o problema da minimização da *compliance* com constrangimentos de volume. Segundo o problema da minimização da *compliance* com constrangimentos de volume

e tensão. Terceiro o problema da minimização do máximo da tensão com constrangimentos de volume e tensão. Os resultados obtidos para estes problemas de otimização demonstram muito boas aproximações às respectivas condições de otimalidade. Parte dos resultados desta tese foram apresentados numa conferência [10].

A realização desta dissertação teve como início a aquisição de conhecimentos na área da otimização de forma e o estudo de vários problemas clássicos resolvidos na literatura, relacionados com a otimização de forma de contornos de furos, em placas de dimensão infinita e finita. Posteriormente, para corresponder às necessidades do tema desta dissertação foi desenvolvido um código em MATLAB, articulado com um programa de elementos finitos, escrito em APDL (*Ansys Parametric Design Language*). O código desenvolvido em APDL, gera o domínio bidimensional do material celular discretizado por uma malha de elementos finitos, em que o meio heterogéneo é gerado através de cinco repetições de uma célula de base em cada direção do plano, e realiza a correspondente análise de elementos finitos. Por outro lado, o código escrito no MATLAB, utiliza os seguintes algoritmos de otimização: quasi-Newton e SQP (*Sequential Quadratic Programming*). O código conjunto de MATLAB/APDL faz a otimização de forma do contorno da inclusão nas microestruturas de materiais celulares, e foi desenvolvido parametricamente para que seja possível gerar uma microestrutura com qualquer fração volúmica de material e qualquer discretização de malha necessária. Outro dos objetivos desta dissertação foi a implementação da equação da superelipse e da equação da superformula para descrever a forma das inclusões.

Esta dissertação, tem também o objetivo de realizar a otimização da microestrutura do material celular recorrendo à teoria da homogeneização, que substitui o meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, onde o comportamento do material celular de microestrutura periódica é obtido através da análise da célula de base e não de todo o domínio do material. Deste modo foi utilizado um código em FORTRAN (PREMAT), que faz a análise estrutural do material celular, articulado com os algoritmos de otimização do MATLAB e com um gerador de malha previamente desenvolvido em APDL.

1.2 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em seis capítulos, sendo que o presente capítulo (capítulo 1) faz uma introdução ao tema da dissertação e são descritas as motivações e objetivos que levaram à realização da mesma.

No capítulo 2 é realizada uma revisão literária, sobre as principais temáticas desta dissertação, são abordados os desenvolvimentos feitos no campo da otimização estrutural, otimização de forma e dos materiais compósitos de microestrutura periódica. Este capítulo tem também como objetivo apresentar alguns problemas clássicos já resolvidos em que esta dissertação se baseia, e evidenciar a sua originalidade científica.

Os fundamentos teóricos que estão na base desta dissertação, são apresentados no capítulo 3. Neste mostram-se as principais equações que descrevem o problema da elasticidade linear. Em seguida é apresentado o modelo de material utilizado e faz-se uma abordagem à teoria da homogeneização. Explica-se também o funcionamento dos algoritmos de otimização e os processos e metodologias utilizadas na análise e otimização de microestruturas periódicas de material celular.

No capítulo 4 é explicada a forma de como se faz a implementação da parametrização da fronteira das inclusões. Neste capítulo são apresentadas as metodologias utilizadas para garantir que os constrangimentos de volume dos problemas de otimização são satisfeitos.

Os resultados obtidos e as discussões dos mesmos são apresentados no capítulo 5. Mostram-se as soluções das três formulações feitas para o problema de otimização de forma, em que para cada uma delas são estudados diversos carregamentos e duas parametrizações distintas para a forma da inclusão. Neste capítulo também são apresentadas duas formas ótimas, resultantes da aplicação da teoria da homogeneização, para o problema da minimização do máximo da tensão.

Por último, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões desta dissertação, onde é feita uma retrospectiva de todo o trabalho realizado no âmbito desta tese. Neste capítulo também se mostram alguns possíveis desenvolvimentos futuros, de forma a dar continuidade à investigação desenvolvida nesta dissertação.

Capítulo 2

Estado da arte

A área da otimização estrutural tem constituído um tópico de interesse ao longo dos últimos 100 anos. Os primeiros trabalhos analíticos sobre a otimização estrutural foram publicados por Maxwell (1980) e Michell (1904). Contudo esta área, apenas teve um grande desenvolvimento após o início da década de 1950, devido ao aparecimento dos primeiros computadores digitais que deram origem a um forte impulso à aplicação dos métodos numéricos de Programação Linear, como por exemplo o algoritmo SIMPLEX. Estes métodos foram aplicados à resolução de problemas de otimização estrutural, envolvendo estruturas reticuladas. Para além do avanço tecnológico a nível da informática, surgiram avanços teóricos significativos na área dos métodos numéricos aplicadas à mecânica estrutural. A descoberta do método dos elementos finitos permitiu pela primeira vez realizar análises a estruturas realmente complexas. O trabalho desenvolvido por Schmit (1960) introduzido pela primeira vez a ideia de combinar a análise estrutural por elementos finitos com os métodos numéricos de otimização, o que revolucionou a metodologia do projeto ótimo de estruturas. Os métodos de Programação Não Linear, tiveram desenvolvimentos substanciais nas décadas de 1970 e 1980, de entre estes métodos destacam-se o método da Programação Quadrática Sequencial (SQP) e o Método das Assíptotas Moveis (MMA) [8].

2.1 Otimização estrutural

A ideia básica da otimização estrutural consiste em determinar um conjunto de parâmetros da estrutura que são denominados de variáveis de projeto (dimensões, densidade, orientação das fibras de materiais compósitos), de modo a minimizar ou maximizar uma determinada função objetivo (massa, rigidez, estabilidade) sem violar os respetivos constrangimentos (volume, tensão máxima admissível na estrutura, deslocamentos máximos, permeabilidade do material). A metodologia do projeto ótimo está associada a um processo iterativo controlado por um algoritmo de otimização, que pesquisa uma solução ótima no espaço das variáveis de projeto limitado pelos constrangimentos. A otimização estrutural pode ser classificada em três categorias principais: otimização dimensional,

otimização de forma ou configuração e otimização de topologia ou *lay-out*. A figura 2.1 mostra como é que se relacionam as principais categorias da otimização estrutural com as várias etapas da atividade de projeto.

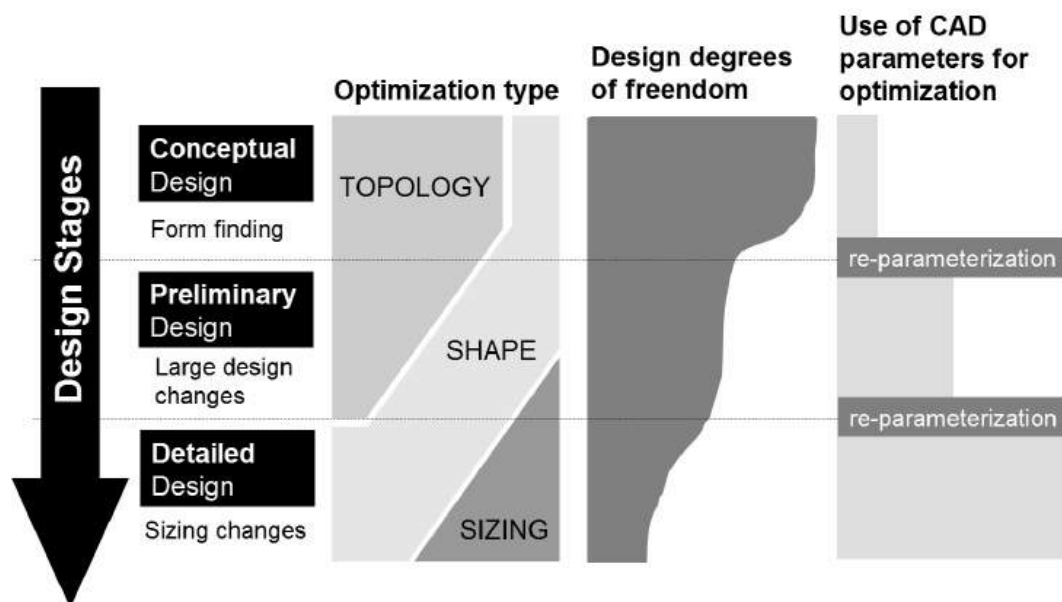


Figura 2.1: Categorias de otimização estrutural associadas às várias etapas do projeto, extraído de [9].

Na fase conceptual de um projeto, tem-se apenas uma ideia do domínio a ser ocupado por uma determinada estrutura e quais as condições de fronteira que se pretendem satisfazer, deste modo a primeira categoria da otimização estrutural a ser utilizada, é a otimização topológica que é vista como um procedimento que distribui racionalmente o material disponível numa área ou volume fixos, através da remoção gradual de pequenas porções de material. Por outro lado, na fase do projeto de pormenor, em que já se tem a forma e topologia da estrutura definidas, resta apenas fazer a otimização dimensional, cujo objetivo é especificar as dimensões dos membros da estrutura.

2.1.1 Otimização dimensional

No início do período da otimização estrutural, esta estava sobretudo orientada para a otimização dimensional que é utilizada para encontrar as dimensões ótimas de uma estrutura, de modo a torná-la o mais eficiente possível para uma determinada função objetivo. Para este tipo de otimização as variáveis de projeto são as dimensões dos elementos estruturais que podem variar de forma contínua ou discreta. Este processo é bastante utilizado, por exemplo, para encontrar as dimensões das secções transversais de barras em treliças. A figura 2.2 ilustra um exemplo de otimização dimensional onde as variáveis de projeto são os diâmetros das barras.

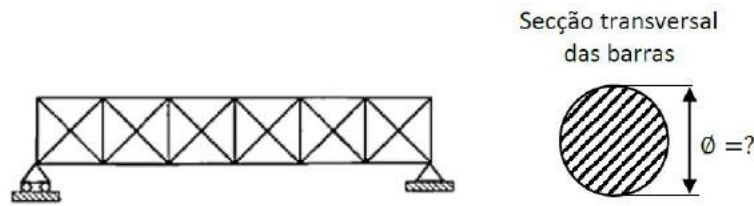


Figura 2.2: Exemplo de otimização dimensional, adaptado de [3].

Este tipo de otimização também apresenta algumas desvantagens, pois a função objetivo não apresenta nenhuma melhoria do ponto de vista da forma e da topologia da estrutura, durante todo o processo de otimização.

2.1.2 Otimização de forma

A otimização de forma começa a surgir em várias publicações no início da década de 1970 [22, 23]. Embora este tipo de otimização seja mais complexo, a otimização de forma combinada com a otimização dimensional conduz a estruturas com desempenhos melhores, do que utilizando cada um dos tipos de otimização isoladamente. Neste caso a topologia da estrutura é fixa e considera-se variável a fronteira $\partial\Omega$ delimitadora do domínio Ω ocupado pela estrutura. A fronteira do domínio pode ser definida por um conjunto de pontos, por uma linha ou por uma superfície. Esta linha ou superfície pode ser modelada através de funções matemáticas como *splines*. Neste tipo de otimização as variáveis de projeto são as coordenadas dos pontos, através dos quais se geram as *splines* ou são os parâmetros de uma determinada equação analítica que descreve a fronteira do problema. Geralmente na otimização de forma as variáveis de projeto são variáveis contínuas. O objetivo da otimização de forma é encontrar o conjunto dos valores das variáveis de projeto, ou seja a forma ótima da fronteira $\partial\Omega$, que minimiza a função objetivo do problema. A figura 2.3 mostra o exemplo de otimização de forma de uma estrutura.

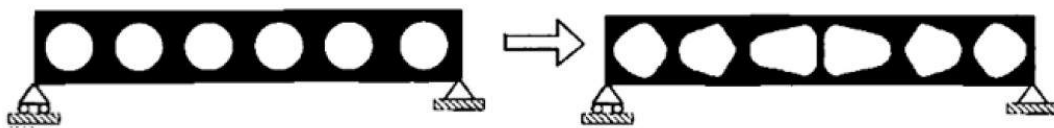


Figura 2.3: Exemplo de otimização de forma, extraído de [3].

2.1.3 Otimização topológica

A otimização topológica é aquela que apresenta maior potencial na área da otimização estrutural, esta é vista como um procedimento que distribui racionalmente o material disponível numa área ou volume fixo, através da remoção gradual de pequenas porções de material com baixo nível de tensão que não está a ser usado eficientemente na transmissão de esforços internos, de modo a maximizar ou minimizar uma determinada função

objetivo sem violar os respetivos constrangimentos. A otimização topológica pode ser dividida em duas categorias, a otimização topológica a partir de um meio discreto ou a partir de meios contínuos. A otimização topológica a partir de meios discretos é aplicada a estruturas reticuladas modeladas através de elementos de barra ou viga. Partindo de uma topologia inicial, a otimização topológica procura determinar o conjunto de nós necessários (de entre o conjunto de nós predefinidos) e as conectividades entre estes, de modo a obter a distribuição de material mais eficiente. As conectividades entre os nós por meio de barras podem ser modeladas através de variáveis booleanas (0 ou 1), que representam um estado de ausência (0) ou presença (1) de barras, ou então por variáveis contínuas, associadas às dimensões das áreas das secções transversais das barras, incluindo a possibilidade de existirem barras com área nula. Este método de otimização topológica é conhecido como *Ground Structure Approach* [3].

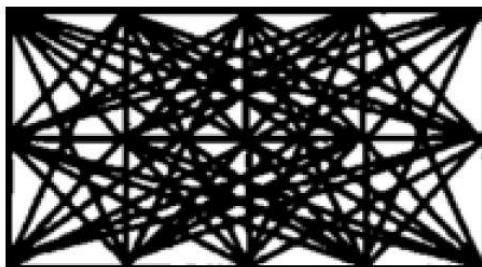


Figura 2.4: Ground structure de domínio retangular de 15 nós, extraído de [3].

A otimização topológica de meios contínuos, consiste em discretizar o domínio de um determinado problema, através de uma malha de N elementos finitos, ao qual são atribuídos uma variável de densidade booleana (0 ou 1) ou contínua, onde $\rho_e \in [0, 1]$. Posteriormente aplica-se o método dos elementos finitos para calcular o campo de tensões nesse domínio. Em seguida estabelece-se uma relação entre os resultados da tensão e o módulo de elasticidade do material, para determinar se um dado elemento faz parte integrante da estrutura na análise de elementos finitos seguinte, e assim se procede sucessivamente a uma remoção gradual de material, até que seja satisfeito o critério de paragem do algoritmo de otimização. A solução final é apresentada sob a forma de presença ($\rho_e = 1$) ou ausência ($\rho_e = 0$) de material no domínio. Os elementos que apresentem uma densidade intermédia (entre 0 e 1) dão uma noção possível do contorno da estrutura.

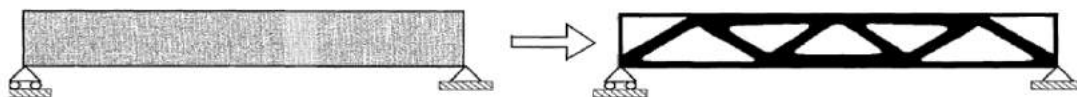


Figura 2.5: Exemplo de otimização topológica, extraído de [3].

O trabalho publicado por Bendsøe e Kikuchi [5] deu origem a uma contribuição significativa na utilização de um modelo de material compósito em otimização topológica de estruturas. Estes investigadores desenvolveram um método designado por *método de*

homogeneização que consiste em preencher o domínio ocupado pela estrutura com um modelo de material compósito de microestrutura periódica, com propriedades elásticas calculadas pela teoria da homogeneização. O modelo de material compósito é descrito através da repetição de uma célula de base quadrada, com um furo de geometria rectangular. Neste método o algoritmo tenta aumentar a porosidade onde o material não está a ser utilizado e reduzir a porosidade nas zonas onde existe maior necessidade de material. As variáveis de projeto deste problema de otimização são as dimensões do furo da célula que caracterizam a microestrutura do material compósito. Outro método de otimização topológica, baseado num modelo material também com densidade variável, é designado por SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). A ideia básica deste método foi proposta por Bendsoe [4] e introduzida mais tarde por Rozvany, Zhou, e Birker [30]. Este método relaciona o tensor E_{ijkl} em cada ponto x do domínio Ω da estrutura, com o tensor de elasticidade E_{ijkl}^0 de um material base sólido e isotópico através de uma lei de potência, que toma como argumento a função densidade $\rho(x) \in [0, 1]$ e expoente p .

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0 \quad \text{com } p > 1 \quad (2.1)$$

Na relação de rigidez anterior, um expoente $p > 1$, tem o efeito de penalizar os valores intermédios de densidade, $0 < \rho < 1$ levando a uma caracterização final do domínio Ω através de regiões de material ($\rho = 1$) e vazio ($\rho = 0$).

2.2 Materiais compósitos

Os materiais utilizados em projeto de engenharia têm sido repensados para que as suas propriedades possam cumprir os requisitos impostos pelo avanço tecnológico. Combinando um ou mais materiais com propriedades físicas e químicas distintas, e insolúveis uns nos outros, foi possível obter uma nova classe de materiais com características únicas, denominados de compósitos. A importância dos materiais compósitos no campo da engenharia, deve-se ao facto de que ao combinar dois ou mais materiais distintos, pode-se obter um material que apresente as melhores propriedades das suas fases constituintes, e até algumas características que não estavam presentes em nenhuma delas isoladamente. A utilização deste tipo de materiais tem vindo a ter uma utilização cada vez mais intensa na mecânica estrutural, sobretudo em aplicações que procurem um compromisso mais exigente entre peso baixo e resistência mecânica elevada.

2.2.1 Constituição dos materiais compósitos

Os materiais que constituem um compósito dividem-se em duas categorias principais: matriz (fase contínua) e reforço (fase dispersa). O reforço dos materiais compósitos proporciona elevados níveis de resistência e rigidez longitudinal, no entanto os materiais utilizados como reforço não podem ser utilizados isoladamente, logo é necessário que a matriz assegure a conexão entre estes, através das suas características aderentes e adesivas.

Apesar da contribuição da matriz para a resistência e rigidez longitudinal do material compósito ser reduzida, esta aumenta a resistência transversal, ajudando a transmitir os esforços internos mais eficientemente [12].

Os compósitos podem ser agrupados em três grupos no que diz respeito ao material que constitui a sua matriz, podendo esta ser de matriz cerâmica, metálica ou polimérica, cada uma com as suas especificidades e limitações. O tipo de matriz mais utilizada na indústria aeronáutica é a matriz polimérica, sendo os materiais poliméricos mais utilizados a resina epoxy e o poliéster. Os materiais compósitos também são usualmente classificados segundo o tipo de material de reforço usado, destacando-se duas grandes classes, o reforços de fibras e de partículas [29]. Geralmente as fibras exibem um comportamento frágil e uma relação linear-elástica até à rotura, por outro lado as matrizes exibem um comportamento elástico não-linear [24].

Normalmente o reforço é mais resistente e rígido que a matriz, e por esse motivo tem a função de suportar os esforços aplicados ao material compósito. A matriz, como fase contínua, tem a função de proteger o reforço das ações ambientais e de danos por desgaste ou impacto e promover a transmissão e distribuição dos esforços aplicados sobre o compósito, a todas as fibras que constituem o elemento de reforço. Esta última função é especialmente importante, na situação em que ocorre a fratura de uma das fibras, pois a carga suportada por uma parte da fibra que fraturou é transmitida para a matriz e depois para outra parte da mesma fibra e também para as fibras adjacentes [24].

2.2.2 Classificação dos materiais compósitos

Atualmente existe uma grande variedade de materiais compósitos. Segundo Jones [24] os materiais compósitos são classificados em diversas categorias, como se mostra em seguida:

1. Materiais compósitos fibrosos.
2. Materiais compósitos laminados.
3. Materiais compósitos particulados.
4. Combinação de alguns ou de todos os três tipos indicados.

Os compósitos fibrosos, são materiais compósitos reforçados por fibras. Verifica-se que um material sob a forma de fibra longa apresenta uma maior resistência e rigidez que sob a forma de bloco, sendo esse o motivo para que as fibras sejam o constituinte do material compósito que suportam o carregamento aplicado. Os materiais compósitos fibrosos podem ser classificadas segundo o tipo de fibra, destacando-se duas grandes classes: fibras longas e fibras curtas. As fibras longas são dispostas regularmente e normalmente apresentam um comportamento ortótropico, por outro lado, as fibras curtas são dispostas aleatoriamente e exibem um comportamento quase-isotrópico [24, 29]. Os compósitos laminados são materiais constituídos por várias camadas, de pelo menos dois materiais distintos, designadas lâminas e ligadas entre si. As lâminas podem ser compósitos como,

por exemplo, compósitos reforçados por fibras, coladas com diferentes orientações. Este tipo de materiais é frequentemente utilizado em estruturas de alto desempenho, nomeadamente na indústria aeronáutica. Os compósitos particulados são materiais compostos por partículas dispersas aleatoriamente no material da matriz. Um exemplo deste tipo de materiais é o betão, que constitui um dos compósitos estruturais mais comuns, e é constituído por partículas de areia e de rocha embebidas numa mistura de cimento e água que endurece por reação química. Um exemplo de materiais que resultam da combinação de outros tipos de materiais compósitos é o betão armado, que combina barras de aço, que funcionam como reforço, e uma matriz de betão.

2.2.3 Comportamento mecânico dos materiais compósitos

A maioria dos materiais usados em engenharia são simultaneamente homogêneos (as propriedades não variam para pontos diferentes do domínio do material) e isotrópicos (para um determinado ponto do domínio do material, as propriedades não variam com a direção considerada). Em contraste os materiais compósitos são frequentemente heterogêneos e ortotrópicos ou anisotrópicos. A resposta de estruturas compostas por materiais compósitos é altamente influenciada pela disposição geométrica das fases distintas do compósito, levando a que as análises destes materiais tenham de ser feitas a diferentes escalas, deste modo é conveniente fazer estudos mecânicos de dois pontos de vista diferentes: micromecânica e macromecânica.

O comportamento macromecânico tem uma maior importância prática e utilidade no projeto de estruturas, pois procura perceber como é que uma lâmina responde a um determinado estado de tensão ou deformação. No estudo da macromecânica considera-se o material compósito como um material homogêneo equivalente, e as suas propriedades elásticas são assumidas como valores médios obtidos para amostras macroscópicas do compósito. Por outro lado a micromecânica estuda o comportamento do material compósito, considerando um material heterogêneo, a partir das interações dos seus componentes. A micromecânica também procura determinar como é que as propriedades de uma lâmina de material compósito são influenciadas pelas propriedades das suas fases constituintes, bem como pela proporção e disposição destes componentes na lâmina. Por fim a micromecânica permite determinar estados de tensão nas fibras, na matriz e na interface. Devido ao avanço tecnológico tornou-se possível controlar a quantidade, disposição e orientação das fibras de ponto para ponto do material compósito, de modo a obter materiais especializados para cumprirem as funções para as quais foram projetados.

2.3 Algumas aplicações

Desde sempre que os materiais compósitos estiveram presentes no nosso mundo, sendo que hoje continuam a ser utilizados cada vez com mais frequência e sobre diversas formas, desempenhando um vasto número de funções. A aplicação dos materiais compósitos deve-se ao facto de estes apresentarem um conjunto de propriedades únicas que não estão presentes nos materiais convencionais. Estes materiais podem ser fabricados pelo homem, mas também podem ser encontrados na natureza, dando como exemplo a madeira que é formada fundamentalmente por um arranjo complexo de células de celulose reforçadas por uma substância polimérica denominada lenhina e por outros compostos orgânicos. Os materiais compósitos têm bastante importância numa grande quantidade de produtos que são utilizados no nosso quotidiano, sendo um dos maiores campos de aplicação a indústria dos transportes, que domina em relação à utilização de materiais compósitos, nomeadamente a indústria aeronáutica e aeroespacial, pois este tipo de indústria requer a utilização de materiais que combinem peso reduzido e elevada resistência e rigidez. A figura 2.6 mostra a tendência no aumento da utilização da percentagem de materiais compósitos, na construção de aeronaves comerciais ao longo das últimas quatro décadas. Atualmente a percentagem de materiais compósitos é superior a metade dos materiais utilizados na construção das aeronaves.

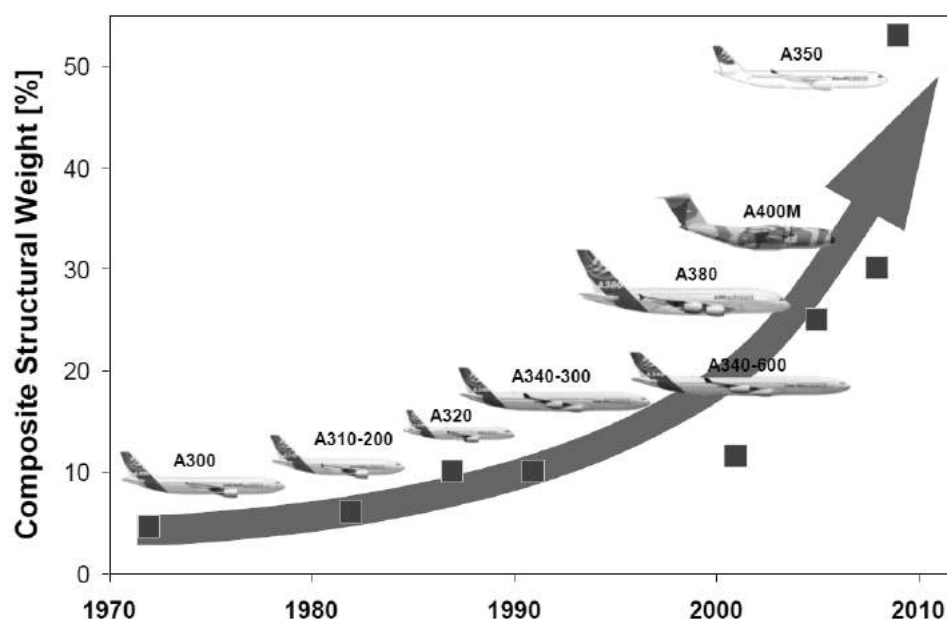


Figura 2.6: Aumento da utilização da percentagem de materiais compósitos, na construção das aeronaves da AIRBUS, adaptado de AIRBUS (2015).

Outro dos grandes campos de aplicação dos materiais compósitos é a construção civil, onde estes já são utilizados há muito tempo em elementos estruturais como é o caso das vigas em betão armado, que resultam da combinação de barras de aço e betão. A junção destes dois materiais permite ultrapassar as limitações individuais de cada um. A indústria desportiva também tem sofrido uma grande evolução ao longo dos últimos anos, pois

muitos dos produtos utilizados na prática desportiva são fabricados utilizando materiais compósitos. Devido às propriedades oferecidas por este tipo de materiais, o equipamento permite proporcionar aos atletas maiores desempenhos. Os materiais compósitos têm ainda uma vasta gama de aplicações na indústria automóvel de alta performance, na indústria eletrotécnica e na nanotecnologia.

Nos materiais compósitos, pode-se ainda considerar o caso particular dos materiais compósitos de microestrutura periódica. Na presente dissertação é dado ênfase aos materiais porosos de microestrutura periódica, sendo estes constituídos por duas fases (sólido e vazio). A otimização das propriedades elásticas deste tipo de materiais permite a obtenção de materiais extremamente especializados para cumprirem a função, para o qual foram projetados. Estas propriedades são obtidas através do controlo do tipo de microestrutura presente nos compósitos. Em seguida são dados dois exemplos de estruturas que podem ser criadas através destes materiais de microestrutura periódica.

2.3.1 Materiais auxéticos

Uma das classes mais importantes dos materiais compósitos de microestrutura periódica são os materiais auxéticos. Estes materiais apresentam várias vantagens em relação aos materiais convencionais (não auxéticos) e são caracterizados por exibirem uma estrutura de coeficiente de Poisson negativo. Durante muitos anos, definiu-se o coeficiente de Poisson como um valor positivo e pertencente ao intervalo de $[0, 0.5[$. No entanto, estudos mais recentes, verificam que o coeficiente de Poisson para materiais isotrópicos pode chegar a -1 . O coeficiente de Poisson estabelece uma relação entre a deformação longitudinal e transversal, deste modo os materiais com comportamento auxético quando são alongados longitudinalmente, também expandem na suas direções transversais. A figura 2.7 mostra o comportamento de um material auxético e não auxético.

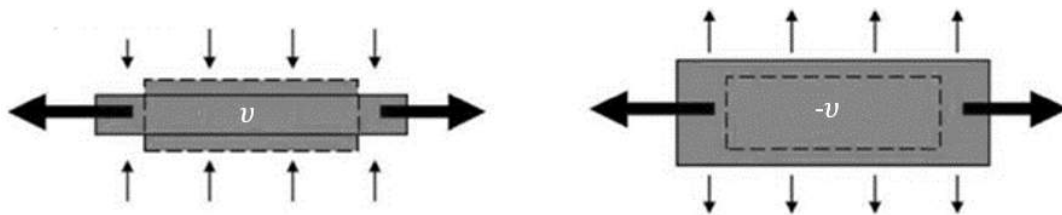


Figura 2.7: Do lado esquerdo está representada a deformação de um material não auxético, quando sujeito a uma tensão de tração na sua direção axial. Do lado direito está representada a deformação de um material auxético, quando sujeito a uma tensão de tração na sua direção axial, extraído de [13].

Para materiais convencionais o módulo de elasticidade, E , é pelo menos duas vezes superior ao módulo de distorção, G , como se verifica através da expressão: $E = 2G(1 + \nu)$, no entanto para materiais auxéticos o valor destas duas constantes elásticas aproxima-se até ao momento que se igualam para um coeficiente de Poisson de -0.5 , ou seja torna-se difícil obter a rotura deste tipo de materiais por esforços de corte, deste modo uma das

características mais importantes de referir nos materiais auxéticos é a elevada resistência a forças tangenciais. Além destas propriedades estes materiais também são caracterizados por terem uma elevada tenacidade, maior resistência à fratura, elevada resistência à indentação e boa absorção de vibrações [13]. O conjunto destas características levam a que os materiais auxéticos possam ser aplicados numa vasta gama de aplicações.

Um dos campos com mais potencial para explorar a aplicação de materiais auxéticos, é o desenvolvimento deste tipo de materiais sobre a forma de fibras, onde estas seriam usadas sobre a forma de malha para fabricar têxteis. Estes têxteis podem ser usados na construção de capacetes, armaduras corporais e roupas de desporto. Outra aplicação destes materiais são os filtros, que tradicionalmente são bastante difíceis de limpar, o que leva a que estes sejam substituídos prematuramente, contudo um filtro auxético pode ser limpo com muito mais facilidade através da aplicação de uma tensão de modo a abrir os seus poros. Na biomédica foi sugerida a aplicação de espumas auxéticas para dilatarem as veias e artérias sanguíneas durante uma cirurgia ao coração. Por outro lado, as espumas com propriedades auxéticas também podem ser aplicadas no campo da construção com a finalidade de isolante acústico, pois apresentam propriedades de absorção do som superiores, quando comparadas com materiais convencionais. Na figura 2.8 está representada a microestrutura de um material auxético.

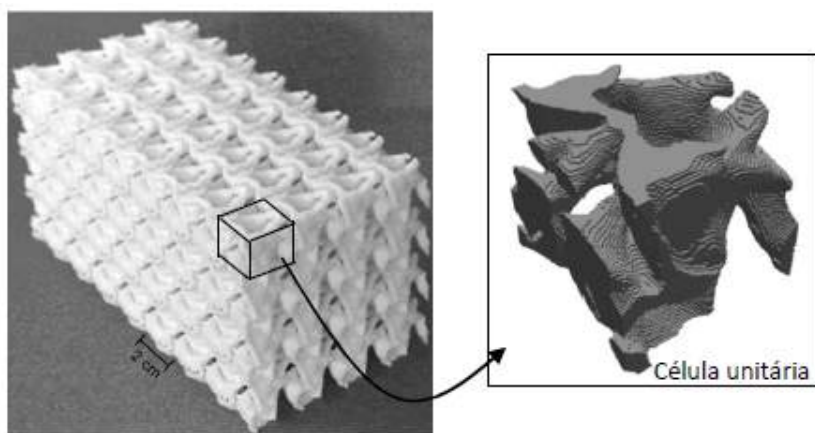


Figura 2.8: Material com coeficiente de Poisson negativo, extraído de [1].

2.3.2 Scaffolds

Devido à necessidade de reparar órgãos e tecidos danificados por doença ou acidente, têm surgido várias técnicas para reparar todas ou algumas funcionalidades perdidas pelo paciente. As técnicas mais utilizadas consistem na remoção do tecido danificado e a sua substituição por enxertos do corpo do próprio paciente, de um dador ou por próteses sintéticas. A prática da substituição do tecido lesado por enxertos apresenta várias limitações como a quantidade de dadores disponíveis e a quantidade de tecido a retirar na medida em que pode provocar algum trauma adicional ao dador. Por outro lado as

próteses apresentam outro tipo de limitação, pois não têm como objetivo a regeneração do tecido danificado mas sim a reposição de algumas funções biológicas [15]. No ramo da biomecânica, os materiais de microestrutura periódica, têm tido bastante destaque, nomeadamente no projeto de *scaffolds* (suportes biomiméticos) [35–37] que são estruturas artificiais porosas, que são colocadas nas zonas lesadas do indivíduo e têm propriedades físicas e químicas apropriadas à adesão de células e formação de novo tecido. Segundo o ponto de vista do projeto os requisitos mecânicos e biológicos do *scaffold* entram em conflito, pois a melhoria de um dos requisitos prejudica o outro. É necessário que um *scaffold* seja em simultâneo poroso (de modo a favorecer o intracrescimento ósseo e cumprir a sua função biológica) e rígido (de modo a cumprir a sua função mecânica). No projeto de *scaffolds* os métodos de otimização desempenham um papel crucial de modo a encontrar um compromisso ótimo entre a rigidez e a permeabilidade do meio. Atualmente é possível fabricar suportes biomiméticos com estruturas bastante complexas, como se pode observar na figura 2.9.

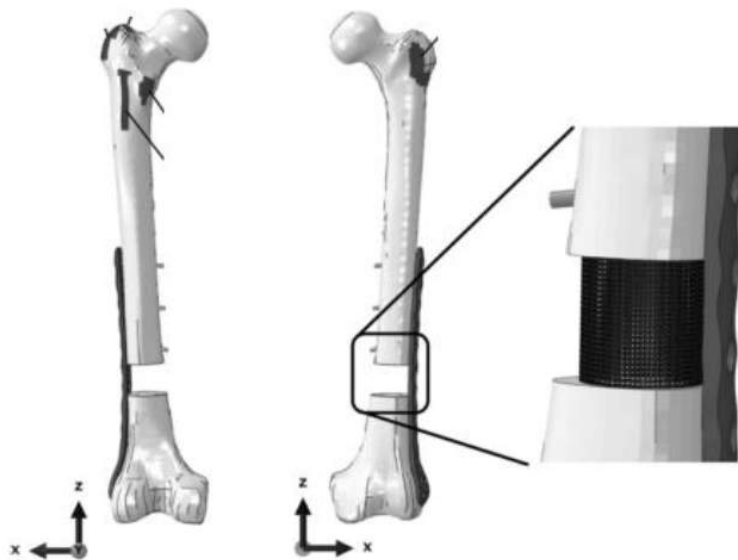


Figura 2.9: Suporte biomimético para correção de um defeito no fémur, extraído de [35].

2.4 Revisão de problemas clássicos

Devido ao facto de na maior parte das estruturas, a concentração de tensões estar normalmente associada a ruptura do material, torna-se interessante determinar a forma de alguns contornos de inclusões embebidas no material, onde a tensão circunferencial ($\sigma_{\tau\tau}$) ao longo da fronteira seja constante, o que leva a uma redução do pico de concentração de tensões. Considere-se uma placa elástica infinita, com um comportamento homogéneo e isótropico, enfraquecida por um conjunto de furos e sujeita a tensões de tração aplicadas nas margens da placa ($\sigma_x^\infty = \sigma_1, \sigma_y^\infty = \sigma_2$). No trabalho publicado por Cherepanov [7], é resolvido analiticamente o problema da determinação da forma do contorno dos

furos Γ , de modo a que a tensão circunferencial ao longo deste seja constante, esta condição designa-se *Equi-Stress Principle* (ESP), e traduz-se matematicamente pela seguinte expressão:

$$\sigma_{\tau\tau}(t) = \text{const}, \quad t \in \Gamma \quad (2.2)$$

Na situação em que se considera uma placa infinita perfurada por apenas um furo, a forma do contorno que verifica o ESP é descrita por um conjunto de curvas elípticas, definidas pela seguinte equação: $x^2\sigma_1^{-2} + y^2\sigma_2^{-2} = \lambda^2$. Através desta equação conclui-se que a forma elíptica do furo tem o rácio dos eixos maior e menor igual ao rácio das tensões macroscópicas aplicadas à placa infinita, assumindo o mesmo sinal para σ_1 e σ_2 . Posteriormente, em Banichuk [2], resolveu-se o problema da minimização da concentração de tensões numa placa elástica infinita, também enfraquecida por um furo, sujeita a tensões de tracção aplicadas nas extremidades da placa. Assume-se que a quantidade que mede a intensidade da concentração de tensões é uma função f , que estabelece uma relação entre os invariantes do tensor das tensões. A resolução deste problema consiste na determinação da forma do furo que minimiza a função f . Segundo [2], verifica-se que o mínimo da concentração de tensões ocorre para geometrias do furo, onde a tensão circunferencial em torno deste é constante.

Se for considerado um furo numa placa elástica infinita, onde as tensões macroscópicas σ_1 e σ_2 aplicadas a esta, têm sinal contrário, o ESP já não é verificado. Segundo Vigdergauz e Cherkayev [34], a forma do furo tende para um retângulo com os lados ligeiramente arredondados, em que o rácio dos lados é igual ao rácio das tensões macroscópicas aplicadas à placa. Esta geometria permite que o sinal da tensão circunferencial mude, mas que continue constante em módulo, esta condição designa-se *M-Equi-Stress Principle*, e traduz-se matematicamente pela seguinte expressão:

$$|\sigma_{\tau\tau}(t)| = \text{const}, \quad t \in \Gamma \quad (2.3)$$

Até agora considerou-se apenas furos em placas infinitas, no entanto este modelo não é adequado para representar um material compósito celular e para otimizar as respetivas propriedades elásticas. Considerando um material compósito celular de microestrutura periódica, Vigdergauz focou a sua análise apenas numa célula isolada, constituída por uma inclusão de vazio embebida numa matriz elástica e isotrópica de domínio retangular, com uma determinada fração volúmica de material. Neste contexto, Vigdergauz percebeu que para obter um material de extrema rigidez, teria de aplicar o *Equi-Stress Principle* ou o *M-Equi-Stress Principle* consoante o carregamento aplicado ao material [31]. Mais tarde Grabovsky e Kohn [20], determinaram analiticamente as equações paramétricas que descrevem a forma das inclusões nas microestruturas de material celular periódico. Na figura 2.10 é representada a microestrutura de Vigdergauz, com a evolução da forma da inclusão, para uma fração volúmica de material constante e diferentes valores do rácio das tensões macroscópicas aplicadas ao domínio do material celular.

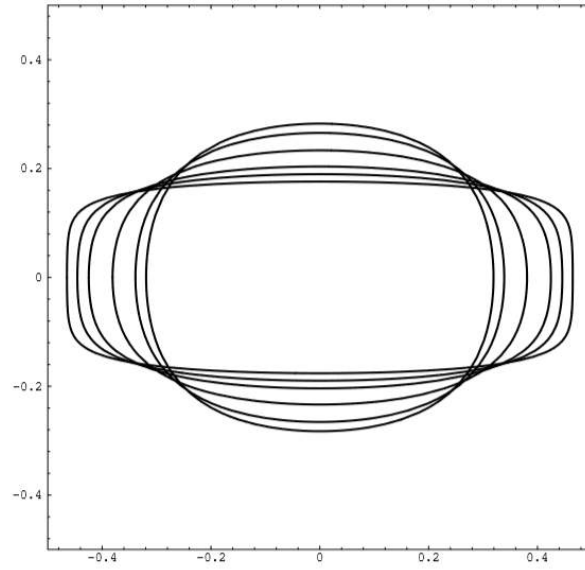


Figura 2.10: Evolução da microestrutua de Vigdergauz, para diferentes rácios das tensões macroscópicas aplicadas, extraído de [20].

O trabalho publicado por Grabovsky e Kohn, mostra que a forma das inclusões obtidas para o problema da minimização da *compliance*, também resolve o problema da minimização da concentração de tensões. Em 2001, Vigdergauz apresentou um conjunto de resultados numéricos, para o problema da maximização da rigidez de um material compósito celular [33]. As formas das inclusões ótimas, foram obtidas para vários valores da fração volúmica de material e considerando apenas um rácio de tensões macroscópicas unitário, estas estão representas na figura 2.11.

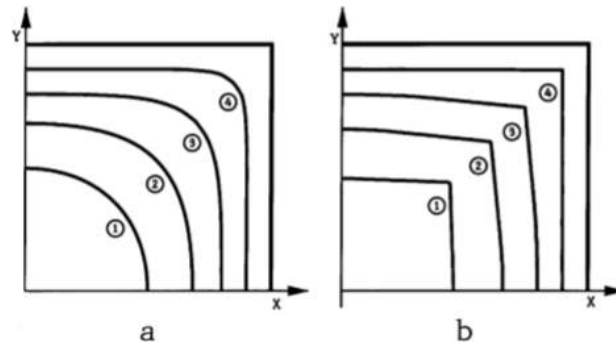


Figura 2.11: Representação da forma ótima das inclusões para varias frações volúmicas de material $V = 0.2(1), 0.4(2), 0.6(3), 0.8(4)$. a) Rácio de tensões macroscópicas unitário, ($\sigma_1 = \sigma_2$); b) Rácio de tensões macroscópicas unitário, ($\sigma_1 = -\sigma_2$), extraído de [33].

O valor numérico do pico da concentração de tensões nas microestruturas anteriores é comparado com o respectivo valor teórico, que surge da aplicação da seguinte equação: $\sigma_{\tau\tau} = Tr\{\sigma_0\}/V$ [33]. Mais recentemente diversos autores têm investigado este assunto. Os trabalhos publicados por Pederson e mais tarde por Wu [27, 39] apresentam uma parametrização simples para descrever a forma da inclusão. Em Pederson [27], utilizou-se a

equação da superelipse para descrever a forma da inclusão, esta equação é definida por: $(x/a)^\eta + (y/b)^\eta = 1$. Através desta parametrização a forma da inclusão é modelada à custa de apenas três parâmetros. O trabalho publicado por Pederson, mostra que esta parametrização fornece bons resultados para inclusões muito grandes ou muito pequenos, além disso destaca-se que a energia de deformação da célula é muito pouco sensível a variações dos parâmetros da equação da superelipse, o que não acontece com a concentração de tensões que é bastante sensível a variações destes parâmetros [27]. Mais tarde Wu, também utiliza a equação da superelipse para descrever a forma da inclusão, no entanto considera que esta tem dois expoentes distintos. Assim a equação da superelipse fica definida por: $(x/a)^{\eta_1} + (y/b)^{\eta_2} = 1$. Esta abordagem permite que a forma da inclusão seja controlada através de dois parâmetros η_1 e η_2 , o que possibilita uma maior flexibilidade da forma da inclusão [39]. Finalmente, em Noël e Duysinx [25], sugeriu-se uma parametrização para resolver o problema da minimização da *compliance* e da minimização da concentração de tensões para um carregamento onde as tensões macroscópicas têm sinais contrários, em que a forma da inclusão é gerada através da intersecção de duas superelipses. Na figura 2.12 estão representados por ordem cronológica os diversos trabalhos publicados que serviram de base à realização desta dissertação.

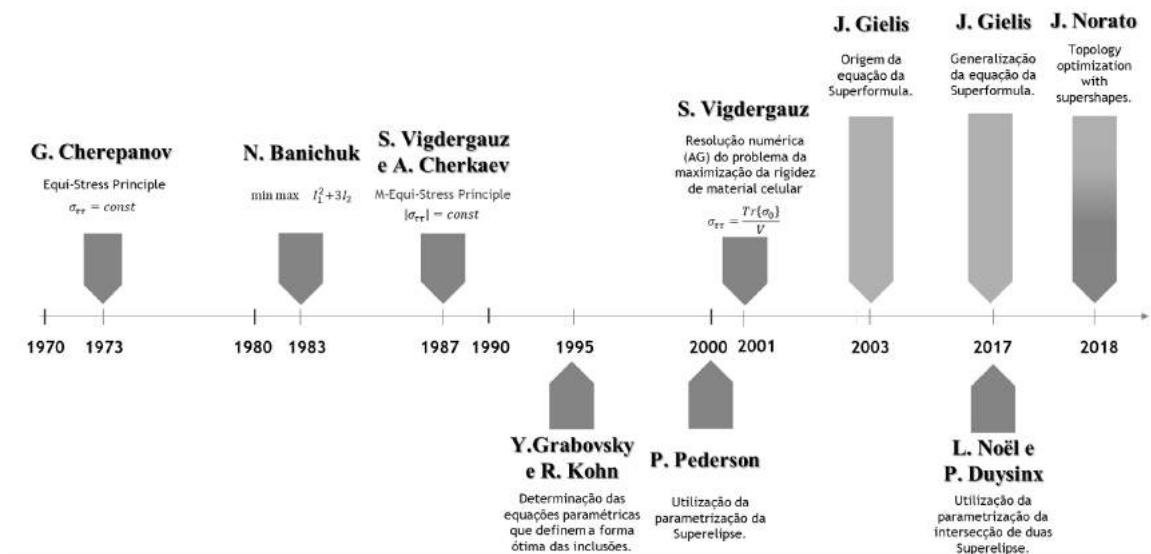


Figura 2.12: Cronologia das principais contribuições que servem de base ao plano de trabalho desta dissertação.

Na figura anterior também se consideram os trabalhos publicados por Gielis [16–18] que dão origem à equação da Superformula, que consiste numa generalização da equação da superelipse. A análise destes trabalhos é feita com mais detalhe no capítulo 4. Pela observação da figura 2.12 também se verifica que o primeiro trabalho onde se faz a aplicação da equação da Superformula à otimização estrutural surge em 2018 e é publicado por Norato [26].

Capítulo 3

Análise e otimização de material

3.1 Equações de elasticidade

Quando um corpo sólido linear elástico é sujeito a um determinado carregamento, este passa a apresentar uma configuração deformada. O grau de deformação que o corpo sólido sofre depende da natureza do material e da intensidade do carregamento aplicado. Quando as solicitações exteriores são retiradas, o material recupera na totalidade a sua configuração inicial, sendo a deformação elástica dependente exclusivamente dos estados de tensão inicial e final. Esta propriedade física é designa por elasticidade. A resolução de um problema de elasticidade linear consiste na descrição e previsão do comportamento de um corpo sólido linear elástico em resposta à aplicação de um conjunto de solicitações. Na resolução deste problema assume-se que os deslocamentos e as deformações são infinitesimais e que as forças de inércia que possam surgir durante o processo de carregamento do material são desprezáveis. A solução do problema de elasticidade linear traduz-se na determinação do tensor das tensões, o tensor das deformações e o vetor deslocamento para todos os pontos do corpo sólido. Os dois campos tensoriais e o campo vetorial têm de verificar as equações de equilíbrio de Cauchy, as equações de compatibilidade das deformações, as equações constitutivas e as condições de fronteira do problema. As relações entre o campo de deslocamentos, campo de deformações, campo de tensões e as solicitações a que o corpo está sujeito, estão representadas na figura 3.1 através do diagrama de Tonti para o problema da elasticidade linear. A resolução do problema de elasticidade linear, é feita através da obtenção das funções que são solução das equações diferenciais que regem o problema considerado, através da utilização do método dos elementos finitos (MEF).

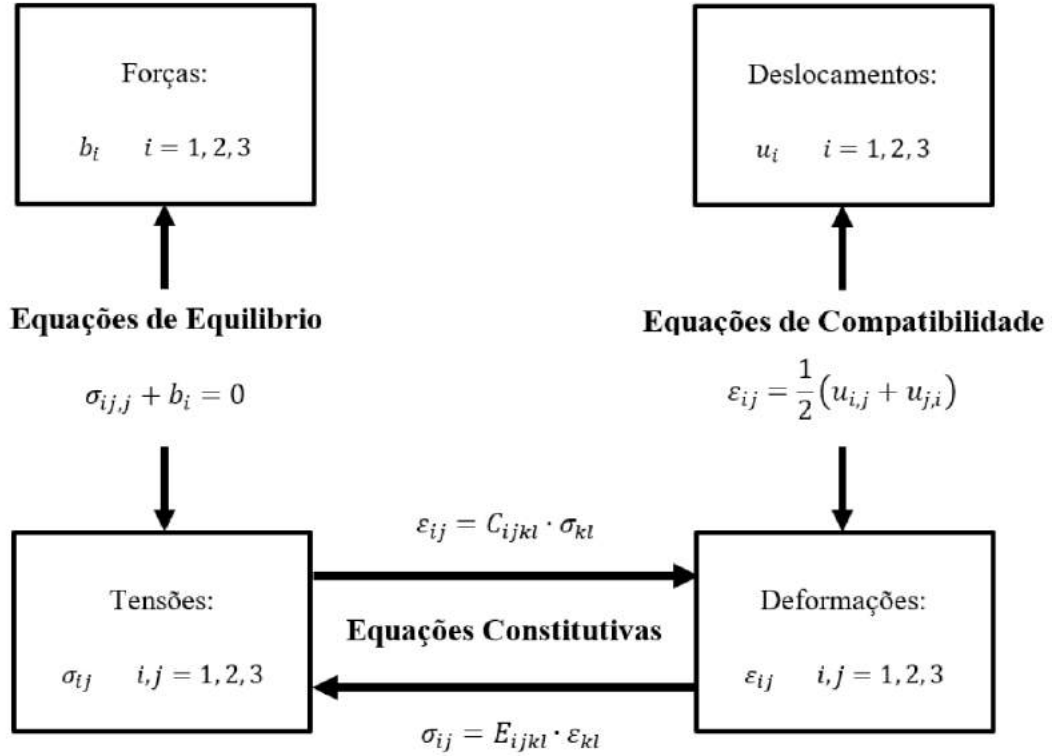


Figura 3.1: Diagrama de Tonti para o problema de elasticidade linear.

3.1.1 Equações de equilíbrio

O estado de tensão de um ponto material no interior de um corpo sólido é definido através das nove componentes do tensor das tensões de Cauchy, que correspondem às tensões normais e tangenciais que atuam em três planos mutuamente perpendiculares entre si e que se intersectam no ponto considerado. O tensor das tensões de Cauchy, pode ser escrito na forma matricial da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Considere-se um elemento de volume infinitesimal de modo a que as componentes de tensão, do tensor das tensões, possam ser consideradas constantes. Contudo, quando no sólido se pretende mudar de um ponto material para outro, as componentes do tensor das tensões variam de intensidade, e assim sendo é necessário conhecer em que condições se processam essas variações. Fazendo o equilíbrio de forças no elemento de volume infinitesimal, surgem as equações de equilíbrio de Cauchy, que são dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \quad (3.4)$$

Onde b_i são as forças volúmicas (forças gravitacionais, magnéticas ou de inércia, por exemplo). As equações de equilíbrio de Cauchy também podem ser escritas com notação indicial, como se mostra em seguida:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.5)$$

Efetuada o equilíbrio de momentos no elemento de volume infinitesimal, conclui-se que o tensor das tensões σ_{ij} é simétrico e que por isso fica perfeitamente descrito com seis componentes, três normais e três tangenciais: σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , τ_{12} , τ_{13} , e τ_{23} .

3.1.2 Equações de compatibilidade das deformações

Quando um corpo sólido elástico é sujeito a um sistema de forças, os pontos materiais desse sólido sofrem alterações das respectivas posições, as quais podem ser fisicamente medidas, constituindo o que se designa por campo de deslocamentos, expresso pela função $u(x)$ com três componentes dependentes das coordenadas de posição do sistema de coordenadas. Os deslocamentos são representados em notação matricial por:

$$u(x) = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Conhecendo o campo de deslocamentos do corpo sólido, obtido em resposta a uma determinada solicitação e assumindo que as derivadas do campo de deslocamentos são muito pequenas em comparação com a unidade, é possível calcular o campo de deformações único, através da seguinte equação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7)$$

Onde ε_{ij} representa o tensor das deformações infinitesimais e corresponde à parte do gradiente dos deslocamentos associado à deformação. Utilizando a notação matricial, o tensor das deformações escreve-se do seguinte modo:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Analogamente ao tensor das tensões, o tensor das deformações também é simétrico, logo o estado de deformação de um ponto de um corpo sólido também fica perfeitamente descrito, apenas com seis componentes do tensor das deformações. A equação 3.7 pode representar um sistema de seis equações diferenciais para determinar as três componentes incógnitas do vetor deslocamento num ponto. O sistema é sobredeterminado e o campo de extensões não pode ser escolhido arbitrariamente, pois poderia conduzir a um campo de deslocamentos impossível, onde o material deformado apresentasse sobreposições ou espaços vazios. Deste modo, um campo de extensões compatível, deve satisfazer as seguintes seis equações da compatibilidade:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right)
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.1.3 Equações constitutivas para o comportamento linear elástico

Para resolver um problema de elasticidade linear é fundamental conhecer como é que o campo de tensões se relaciona com o campo das deformações, pois a aplicação de um sistema de forças a um corpo sólido, origina o aparecimento conjugado de tensões e deformações. As equações constitutivas descrevem o comportamento elástico dos sólidos, relacionando as nove componentes do tensor das tensões com as nove componentes do tensor das deformações. As equações constitutivas também são conhecidas por lei de *Hooke*, que descrita através da seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.10)$$

Na equação anterior σ_{ij} representa o tensor das tensões, E_{ijkl} representa o tensor de rigidez de quarta ordem, que caracteriza o comportamento do material e ε_{kl} é o tensor das deformações. O tensor das tensões e o tensor das deformações também se podem relacionar através da lei de *Hooke* invertida, que é dada por:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.11)$$

Onde C_{ijkl} é o tensor de flexibilidade (ou *compliance*) de quarta ordem, e corresponde ao inverso do tensor de rigidez E_{ijkl} .

$$C_{ijkl} = E_{ijkl}^{-1} \quad (3.12)$$

Para o caso da elasticidade linear os tensores C_{ijkl} e E_{ijkl} são constituídos por 81 coeficientes elásticos constantes, contudo devido à simetria dos tensores σ_{ij} e ε_{kl} existirão

no máximo 36 constantes elásticas diferentes. A equação 3.10 pode ser escrita, na sua forma matricial, através da seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1123} & E_{1113} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2223} & E_{2213} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3323} & E_{3313} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & E_{1212} & E_{1223} & E_{1213} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2312} & E_{2323} & E_{2313} \\ E_{1311} & E_{1322} & E_{1333} & E_{1312} & E_{1323} & E_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Utilizando a notação de Voigt-Kelvin, pode-se agrupar os diferentes componentes do tensor das tensões σ_{ij} e do tensor das deformações ε_{kl} em dois vetores σ_i e ε_j respectivamente. A notação considerada está representada na seguinte tabela:

Tabela 3.1: Tensores de tensão e deformação e respetiva notação reduzida.

Tensão (σ)		Deformação (ε)	
Notação do tensor	Notação reduzida	Notação do tensor	Notação reduzida
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
τ_{23}	σ_4	$2\varepsilon_{23}$	ε_4
τ_{31}	σ_5	$2\varepsilon_{31}$	ε_5
τ_{12}	σ_6	$2\varepsilon_{12}$	ε_6

A energia de deformação elástica é a energia que é consumida pela ação das forças exteriores na deformação elástica de um corpo sólido. O incremento da densidade de energia de deformação elástica é dado por:

$$dw^e = \sigma_i d\varepsilon_j \quad (3.14)$$

Utilizando a lei de *Hooke*, a equação (3.14) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$dw^e = E_{ij} \varepsilon_j d\varepsilon_i \quad (3.15)$$

Integrando a equação anterior, para todos os incrementos de deformação, desde a configuração inicial até à configuração final deformada, obtém-se a densidade de energia total de deformação elástica, absorvida pelo corpo elástico sujeito a um determinado carregamento. O resultado da integração da equação (3.15) é dado por:

$$w^e = \frac{1}{2} E_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (3.16)$$

Aplicando o teorema de Schwarz, tem-se que as derivadas cruzadas da função densidade de energia elástica são iguais, logo:

$$\frac{\partial^2 w^e}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = E_{ij} = E_{ji} = \frac{\partial^2 w^e}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} \quad (3.17)$$

Pela equação (3.17) conclui-se que o tensor de rigidez E_{ij} e o tensor de flexibilidade C_{ij} são simétricos, deste modo os 36 coeficientes elásticos são reduzidos a 21.

3.1.4 Classes de simetria dos tensores constitutivos

Os tensores de rigidez e de flexibilidade, possuem vários níveis de simetria, pelo que podem ser classificados consoante o número de planos de simetria elástica que apresentem. Segundo Chadwick, Vianello e Cowin [6], é demonstrada a existência de oito classes de simetria dos tensores de rigidez e de flexibilidade (ver figura 3.2).

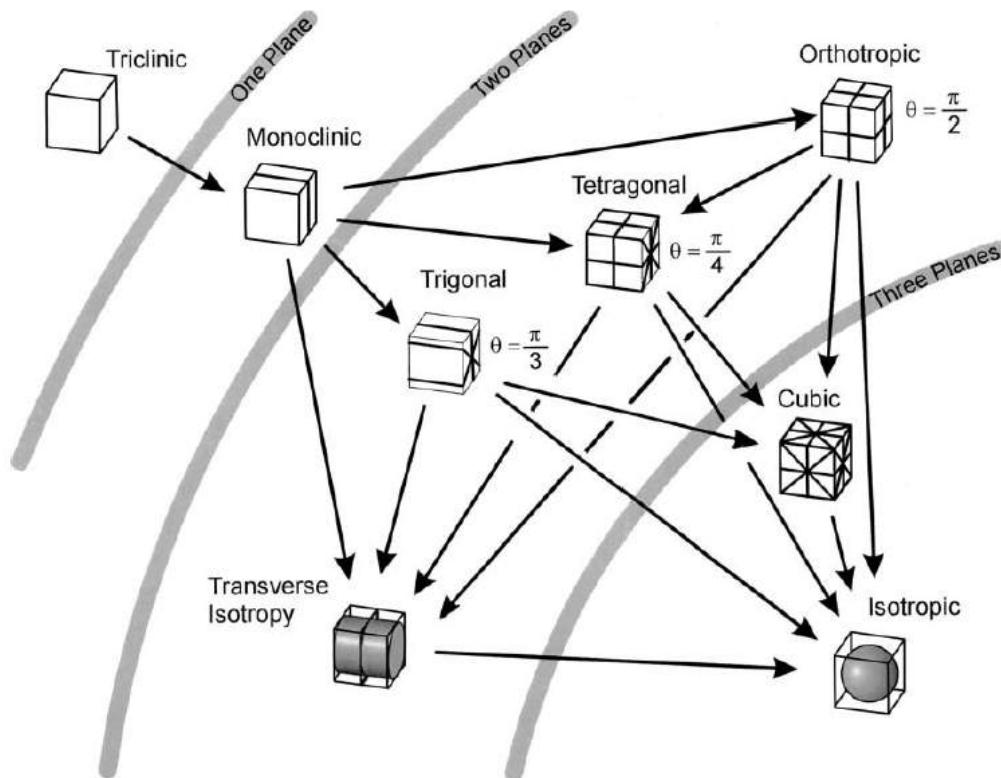


Figura 3.2: Classes de simetria consoante o aumento sucessivo de planos de simetria, extraído de [6].

Com o aumento do número dos planos de simetria elástica dos tensores considerados, o número de coeficientes elásticos independentes, necessários para caracterizar o comportamento dos materiais diminui. Na presente dissertação os tensores de elasticidade apresentam uma simetria cúbica ou ortotrópica, consoante a forma das inclusões presentes nas células de base do material celular. As várias classes de simetria podem ser consultadas na secção dos anexos A.

3.1.5 Tensão equivalente de von-Mises

O objetivo dos critérios de cedência é obter uma relação entre as componentes do tensor das tensões que permita prever em que condições se dá início a deformação plástica do material. O conceito de tensão equivalente de von-Mises baseia-se no critério da energia de distorção máxima. Partindo da equação (3.16) e após alguma manipulação algébrica, conclui-se que a densidade de energia elástica total é obtida através da soma de duas parcelas de energia, a densidade de energia elástica de distorção, que é a energia associada a variações da forma do material, e a densidade de energia elástica de dilatação ou contração que é associada a variações de volume do material. A densidade de energia elástica total pode ser obtida através da seguinte equação:

$$w^e = \frac{3}{4G} \tau_{oct}^2 + \frac{1}{2K} \sigma_{oct}^2 \quad (3.18)$$

Na equação anterior, σ_{oct} é a tensão normal octaedral que não produz deformação plástica e τ_{oct} é a tensão de corte octaedral, que é a única componente da tensão octaedral responsável pela deformação plástica, esta conclusão leva a derivação do critério da energia de distorção máxima, que considera que um determinado material plastifica, quando o valor da densidade de energia elástica de distorção atinge um valor crítico. Deste modo um material encontra-se no domínio elástico enquanto a seguinte condição for verificada.

$$w_d^e = \frac{3}{4G} \tau_{oct}^2 \leq w_{crit} \quad (3.19)$$

A determinação do valor crítico da densidade de energia elástica de distorção efetua-se considerando o início da deformação plástica de um estado de tração uniaxial, nestas condições o valor crítico da densidade de energia elástica de distorção, é dado por:

$$w_{crit} = \frac{3}{4G} \left[\frac{1}{3} \sqrt{2\sigma_e^2} \right]^2 = \frac{1}{6G} \sigma_e^2 \quad (3.20)$$

Onde σ_e representa a tensão de cedência do material. Substituindo este resultado na equação (3.19) e escrevendo a tensão de corte octaedral em função das componentes do tensor das tensões obtém-se a seguinte forma para o critério da energia de distorção máxima:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) \leq 2 \sigma_e^2 \quad (3.21)$$

Através da equação anterior deduz-se a expressão da tensão equivalente de von-Mises que reduz um estado de tensão complexo a um escalar que pode ser comparado com a tensão de cedência do material, deste modo a tensão equivalente de von-Mises pode ser utilizada para determinar se um material isotrópico, consegue suportar um determinado carregamento que pode combinar tensões normais e tangenciais.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2)} \quad (3.22)$$

3.2 Modelo de material

Nesta dissertação é utilizado um modelo de material bidimensional de material compósito celular de duas fases (sólido e vazio) e de microestrutura periódica, onde o meio heterogêneo é gerado através da repetição de uma célula de base em duas direções espaciais. O módulo de elasticidade da fase sólida é considerado unitário, $E^{(1)} = 1\text{GPa}$, assume-se que esta tem um coeficiente de Poisson de 0.3 e que exibe um comportamento linear elástico e isotópico. O modelo de material considera duas escalas distintas, ilustradas na figura 3.3. A escala macroscópica tem como dimensão característica o comprimento D do domínio Ω , ocupado pelo material celular. Considera-se que o meio heterogêneo pode estar sujeito a solicitações aplicadas na fronteira $\partial\Omega$ através de forças de superfície \mathbf{t} em Γ_t e deslocamentos impostos \mathbf{u} em Γ_u , para além destas solicitações o material celular pode estar sujeito a forças volúmicas \mathbf{b} . A escala microscópica tem como dimensão característica a dimensão d da célula de base que ocupa o domínio Y . Assume-se que a dimensão característica D é unitária e muito maior que a dimensão característica d do meio heterogêneo ($D \gg d$).

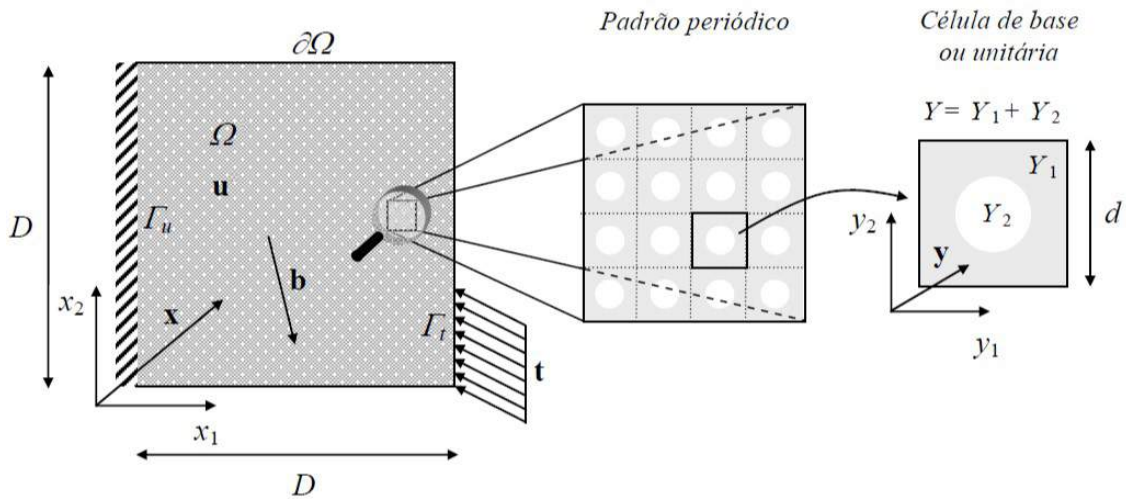


Figura 3.3: Modelo de material de material celular poroso de microestrutura periódica, com dimensão característica do domínio macroscópico D e uma célula de base com dimensão característica d , adaptado de [8].

A modelação numérica foi feita através do *software* de elementos finitos ANSYS. Para modelar a curva da inclusão da célula de base, é considerado apenas um quarto do seu domínio. Para descrever a fronteira das inclusões foram utilizadas *splines* através da utilização do comando SPLINE. No presente trabalho, para definir cada *spline* são utilizados seis nós, por esse ser o número máximo permitido pelo ANSYS. A cada nó das *splines* é associado um KEYPOINT, o que leva a que cada *spline* seja definida por um conjunto de seis KEYPOINTS, além disso para garantir a continuidade da forma das inclusões em pontos de encontro de diferentes *splines* foi adicionada a informação dos declives nas extremidades das *splines*. Os outros quadrantes da célula de base foram

obtidos através da utilização do comando ARSYM, que reflete uma geometria em relação a um determinado eixo. Posteriormente a célula de base é discretizada por uma malha de elementos finitos (ver figura 3.4), utilizando o elemento finito *Plane42*, da biblioteca do ANSYS, definido por quatro nós cada um com dois graus de liberdade (translações nas duas direções espaciais do plano). O modelo numérico do domínio macroscópico, foi gerado através da repetição da célula de base, em duas direções espaciais, através de comandos de programação em APDL, particularmente os comandos EGEN e NGEN.

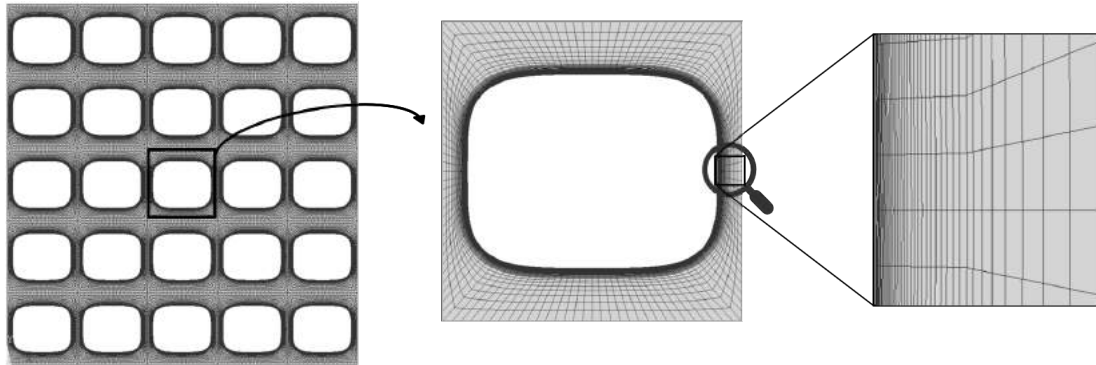


Figura 3.4: Padrão periódico de 5x5 células de base.

3.3 Homogeneização

Considere-se como um meio heterogêneo um material compósito ou celular, gerado através da repetição de uma célula de base. Quando este é sujeito a um determinado campo de tensão ou deformação, o meio heterogêneo responde mecanicamente de acordo com as propriedades elásticas que o caracterizam. Para além dos métodos experimentais, para determinar as propriedades elásticas de um material compósito ou celular, pode-se recorrer a métodos analíticos ou métodos numéricos. Os métodos analíticos são mais utilizados para resolver problemas de geometria simples. Enquanto, para problemas de geometria mais complexa, em que o número de heterogeneidades não é muito elevado, é comum utilizar-se métodos numéricos (por exemplo, o método dos elementos finitos), em que a precisão é tanto maior quanto mais refinada for a malha utilizada para modelar o problema. Se o meio heterogêneo que se quer modelar apresentar um número elevado de heterogeneidades a modelação numérica do material torna-se impraticável, pois a malha de elementos finitos teria milhões de graus de liberdade o que resultaria num custo de cálculo computacional proibitivo.

Para ultrapassar as limitações dos métodos analíticos e da modelação numérica exaustiva, é usual recorrer à teoria da homogeneização, que foi sobretudo desenvolvida durante a década de 1970. Esta teoria é utilizada para substituir o meio heterogêneo por um meio homogêneo equivalente com propriedades elásticas homogeneizadas que traduzem o comportamento em média do meio original, incorporando os efeitos da escala microscópica

e estando sujeito às mesmas condições de fronteira à escala macroscópica. O comportamento de um material celular poroso de microestrutura periódica é obtido pela análise da célula de base através da teoria da homogeneização. Deste modo o detalhe da modelação numérica do meio heterogéneo faz-se apenas ao nível da célula de base. A figura 3.5 apresenta de forma esquemática o processo de homogeneização, onde está representado o meio heterogéneo de microestrutura periódica, com propriedades elásticas E_{ijkl}^ε , substituído através do processo de homogeneização por um meio homogéneo equivalente, com propriedades elásticas E_{ijkl}^H . A implementação computacional da teoria da homogeneização para materiais compósitos de microestrutura periódica através do método dos elementos finitos pode ser vista em [21].

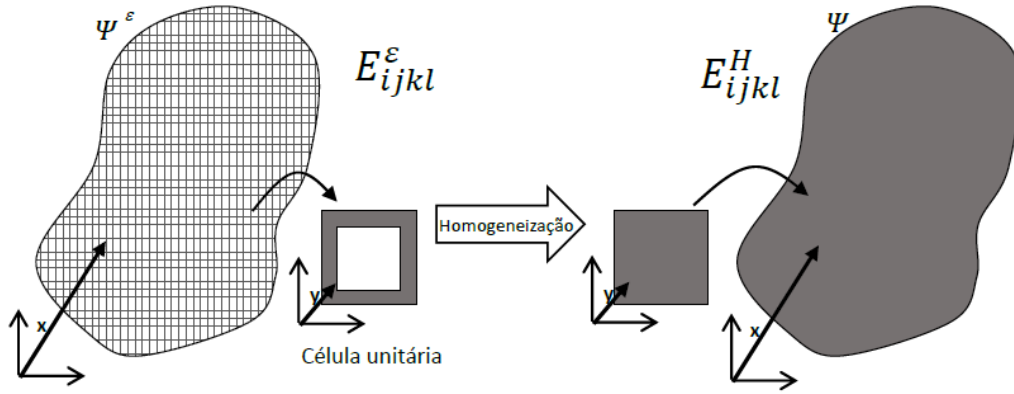


Figura 3.5: Representação esquemática do método da homogeneização, extraído de [1].

O processo de homogeneização apresenta uma perda de precisão de resultados comparada com a precisão do modelo detalhado de toda a microestrutura. Deste modo torna-se importante avaliar até que ponto o problema real se aproxima das hipóteses assumidas pela teoria da homogeneização. Uma das hipóteses é a de separação de escalas, isto é a dimensão característica d do domínio microscópico é muito inferior à dimensão característica D do domínio macroscópico. O quociente entre estas duas dimensões características, designa-se por coeficiente homotético:

$$\varepsilon = \frac{d}{D} \quad (3.23)$$

A hipótese da separação de escalas assumida pela teoria da homogeneização, calcula as propriedades homogeneizadas para a situação limite de $\varepsilon \rightarrow 0$ ou seja a dimensão característica da célula de base é considerada infinitesimal quando comparada com a dimensão característica D do domínio macroscópico. Conclui-se que a teoria da homogeneização resolve um problema adimensional, quando em termos práticos, os materiais compósitos têm um domínio macroscópico com dimensões finitas ($0 < \varepsilon < 1$). Outra hipótese da teoria da homogeneização é a da uniformidade dos campos de tensão ou deformação à escala macroscópica em uma sub-região onde o material é caracterizado por uma determinada célula de base. Sublinhe-se que nesta célula a tensão poderá distribuir-se de forma não

uniforme, mas o seu valor médio será o valor constante associado à tensão que se mede à escala macroscópica. Isto implica que esta teoria não seja apropriada quando aplicada a regiões críticas do domínio caracterizadas por gradientes elevados, i.e., onde os campos macroscópicos na realidade variam consideravelmente. Outra hipótese assumida pela teoria da homogeneização é a existência de uma periodicidade infinita do domínio microscópico dentro do domínio macroscópico (ver figura 3.24), tal que qualquer propriedade Ψ física ou geométrica é periódica se for satisfeito:

$$x \in \Omega \text{ e } (x + y) \in \Omega \Rightarrow \Psi(x + y) = \Psi(x) \quad (3.24)$$

Na prática, uma célula de base repete-se um número finito de vezes e então a hipótese da periodicidade não se verifica na fronteira do domínio ocupado pelo material.

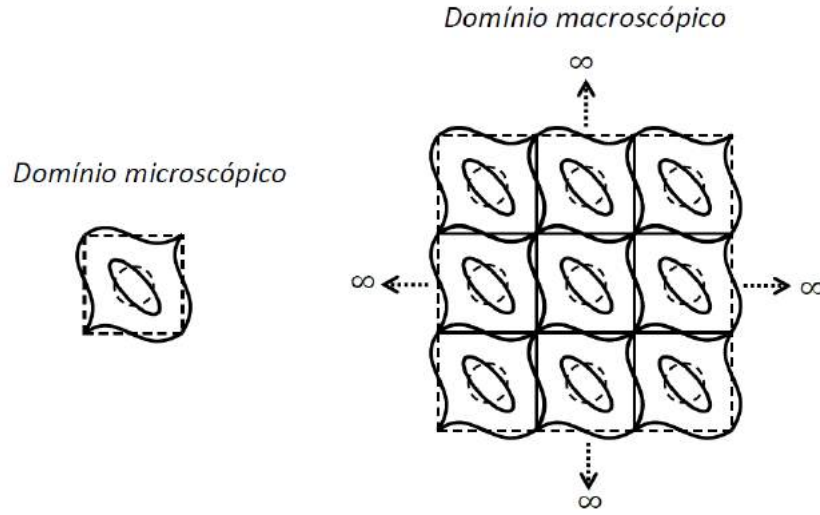


Figura 3.6: Representação esquemática da hipótese de periodicidade infinita no domínio microscópico e macroscópico, extraído de [1]

O cálculo das propriedades elásticas homogeneizadas é realizado através da seguinte equação [21]:

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{pqrs} \left(\delta_{rk} \delta_{sm} - \frac{\partial \chi_r^{km}}{\partial y_s} \right) \left(\delta_{pi} \delta_{qj} - \frac{\partial \chi_p^{ij}}{\partial y_q} \right) dY \quad (3.25)$$

Onde $|Y|$ representa o volume do domínio da célula de base, δ representa o delta de Kronecker e o vetor χ^{km} é uma função Y -periódica (toma valores iguais em lados opostos do domínio Y) e é interpretado como as deformações características da célula de base em resposta à aplicação de seis estados de deformação de testes unitários macroscópicos: $e_{rs}^{0(11)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $e_{rs}^{0(22)} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $e_{rs}^{0(33)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $e_{rs}^{0(12)} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $e_{rs}^{0(13)} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ e $e_{rs}^{0(23)} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. O vetor χ^{km} é solução da seguinte equação de equilíbrio que pode resolvida através do MEF.

$$\int_Y E_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{km}}{\partial y_s} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkm} e_{rs}^{0(km)} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall \mathbf{v} \in V_Y \quad (3.26)$$

3.4 Problema de otimização

O projeto ótimo de estruturas está associado a um processo iterativo, controlado por um determinado algoritmo de otimização. A formulação matemática de um problema de otimização é feita, definindo variáveis de projeto cujos valores são alterados a cada iteração do algoritmo de otimização, uma função objetivo que se pretende minimizar ou maximizar e os vários constrangimentos que não podem ser violados. A avaliação da função objetivo e dos constrangimentos, é feita através da utilização de um método numérico, sendo muitas vezes utilizado para esse efeito o MEF. Um problema de otimização estrutural, é formulado matematicamente da seguinte forma *standard*:

$$\begin{array}{llll}
 \min_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) & & \\
 \text{Sujeito a} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & j = 1, \dots, m & \\
 & h_k(\mathbf{x}) = 0 & k = 1, \dots, p & \\
 & x_i^l \leq x_i \leq x_i^u & i = 1, \dots, n &
 \end{array} \quad (3.27)$$

Onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o vetor das n variáveis de projeto, $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo, e as funções $g_i(\mathbf{x})$ e $h_k(\mathbf{x})$ são os m constrangimentos de desigualdade e os p constrangimentos de igualdade, respetivamente. x_i^l e x_i^u são os limites inferior e superior de variação das variáveis de projeto x_i .

O objetivo do presente trabalho consiste na determinação da forma ótima de inclusões Γ_{AB} em microestruturas de material compósito celular, de modo a minimizar o campo de tensões local. Para a resolução do problema de otimização, considera-se um modelo bidimensional de duas fases (sólido Ω_A e vazio Ω_B) sujeito a um determinado campo de tensões macroscópicas, conforme se ilustra na figura 3.7.

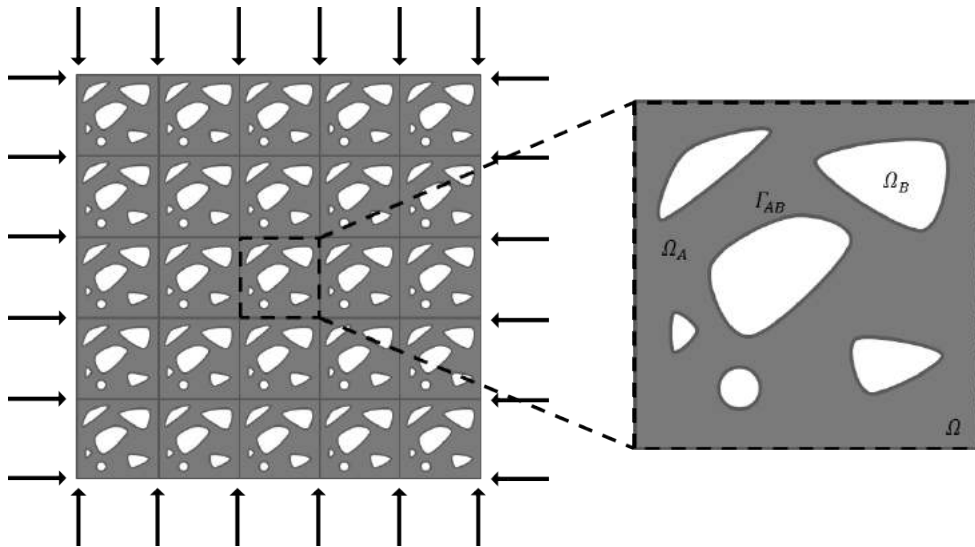


Figura 3.7: Descrição do problema de otimização de forma da microestrutura de um material compósito celular.

Muitas vezes nos problemas de otimização de forma, define-se como variáveis de projeto, as coordenadas dos nós das malhas de elementos finitos. Esta abordagem permite que a fronteira de projeto que se pretende otimizar seja extremamente flexível, o que pode não ser uma vantagem, pois para parametrizações demasiado flexíveis o algoritmo de otimização pode minimizar a função objetivo á custa de distorcer os elementos da malha de elementos finitos. Esta abordagem tem outra desvantagem, que é o número elevado de constrangimentos e de variáveis de projeto. Uma maneira de contornar este problema, é utilização de uma expressão analítica para descrever a curva da fronteira de projeto. Esta abordagem permite descrever uma fronteira através de poucas variáveis de projeto, no entanto, uma curva descrita através de uma equação pode ser uma parametrização demasiado rígida, embora no próximo capítulo se apresente uma fórmula analítica com bastante flexibilidade na descrição geométrica da forma.

No presente trabalho, as formas ótimas das inclusões, presentes na microestrutura dos materiais celulares, foram obtidas considerando três formulações distintas para os problemas de otimização. O primeiro problema resolvido corresponde a um problema clássico da otimização estrutural, que visa a minimização de uma função objetivo que é a energia de deformação por unidade de volume da célula de base (*compliance*), sujeito a um constrangimento de volume. Este problema é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{s}} & C \\ \text{Sujeito a} & V(\mathbf{s}) = V^* \\ & \mathbf{s}_i^l \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_i^u \quad i = 1, \dots, n \end{array} \quad (3.28)$$

Onde \mathbf{s} é o vetor das n variáveis de projeto, C é a *compliance* e $V(\mathbf{s})$ é a fração volúmica de material em função das variáveis de projeto. Neste trabalho o vetor das variáveis de projeto é constituído pelo conjunto de parâmetros que definem a expressão analítica utilizada para modelar a curva da inclusão. O constrangimento de volume é necessário para evitar soluções triviais.

A introdução de constrangimentos de tensão no problema de otimização anterior conduz a uma solução mais precisa da forma ótima da inclusão, pois a energia de deformação é muito pouco sensível a pequenas variações da geometria da forma da inclusão, ao contrário do que acontece com a função de tensão, que é bastante sensível a essas variações [27]. Por este motivo também foi usada a formulação dada pela equação (3.29) para resolver problemas cuja condição de otimalidade é igual à do problema dado pela equação (3.28). Nesse caso a tensão limite teórica é conhecida e dada pelo traço do tensor das tensões macroscópicas σ_0 a dividir pela fração volúmica de material V^* .

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{s}} & C \\ \text{Sujeito a} & \sigma_e^{VM}(\mathbf{s}) \leq \frac{Tr(\sigma_0)}{V^*} \quad e = 1, \dots, n_e \\ & V(\mathbf{s}) = V^* \\ & \mathbf{s}_i^l \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_i^u \quad i = 1, \dots, n \end{array} \quad (3.29)$$

Onde σ_e^{VM} é a tensão de von-Mises associada ao elemento e da malha de elementos finitos.

Em muitas aplicações, o interesse não é minimizar o valor da densidade da energia de deformação, mas sim minimizar o pico de concentração de tensões, deste modo no presente trabalho também se considerou o problema da minimização do máximo da tensão de von-Mises com constrangimento de volume, este problema é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \quad & \max \left[\sigma_e^{VM}(\mathbf{s}) \right] & e = 1, \dots, n_e \\ \text{Sujeito a} \quad & V(\mathbf{s}) = V^* \\ & \mathbf{s}_i^l \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_i^u & i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.30)$$

O problema de otimização anterior pertence a uma classe de problemas onde os algoritmos de otimização baseados no gradiente não são aplicáveis, uma vez que a função objetivo não é diferenciável. Para contornar este obstáculo, o problema de otimização definido pela equação (3.30) é formulado de forma equivalente do seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}, z} \quad & z \\ \text{Sujeito a} \quad & \sigma_e^{VM}(\mathbf{s}) \leq z & e = 1, \dots, n_e \\ & V(\mathbf{s}) = V^* \\ & \mathbf{s}_i^l \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_i^u & i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para resolver os problemas de otimização de forma considerados nesta secção, foi utilizado um algoritmo cujo fluxograma está representado na figura 3.8. Este algoritmo foi desenvolvido em ambiente MATLAB, articulado com um programa de elementos finitos ANSYS, utilizando APDL. Para a situação em que se recorre à teoria da homogeneização para fazer a análise da célula de base é utilizado um código em FORTRAN (PREMAT), desenvolvido por Guedes e Kikuchi [21]. Conforme se pode ver no fluxograma, inicialmente é criado um modelo numérico que corresponde à geração da malha de elementos finitos do meio heterogéneo que se pretende estudar. Em seguida, é executado um algoritmo que garante que o constrangimento de volume é satisfeito, este é explicado em pormenor na secção 4.3. Posteriormente é realizada a análise da célula de base através da aplicação do método dos elementos finitos ou através da teoria de homogeneização. Para determinar um novo ponto no espaço de projeto é aplicado o algoritmo quasi-Newton ou SQP, consoante o problema de otimização enunciado anteriormente que se pretende resolver. O funcionamento destes algoritmos de otimização é detalhado na secção seguinte.

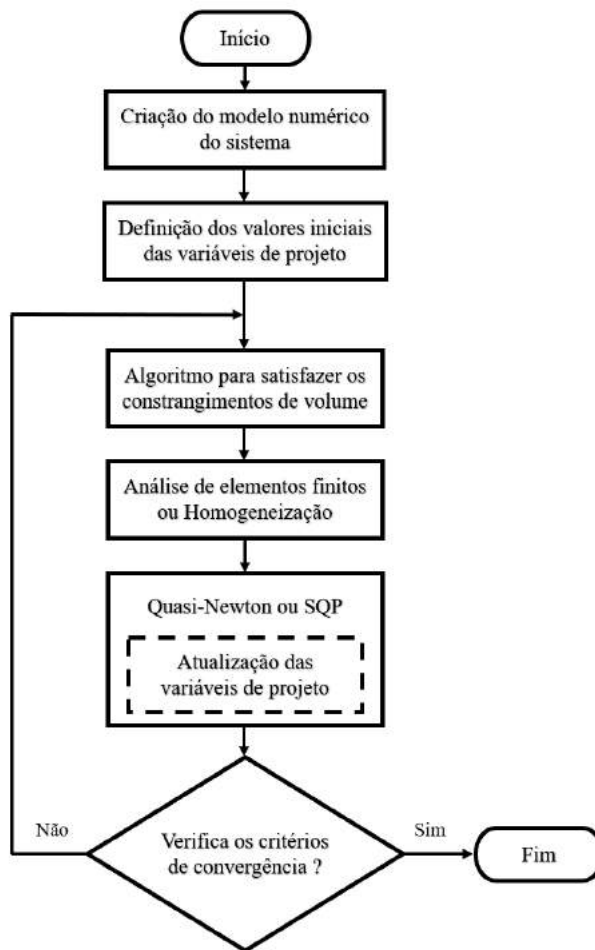


Figura 3.8: Fluxograma do algoritmo de otimização de forma, utilizado para resolver os problemas de otimização do presente trabalho.

3.4.1 Algoritmo de otimização

Um algoritmo é um processo que envolve um número finito de instruções, que se destina a resolver uma classe de problemas. De um modo geral os algoritmos de otimização, iniciam-se com uma solução inicial que representa uma estimativa inicial do ponto ótimo e por meio de um processo iterativo, as soluções subsequentes vão sendo melhoradas, até que as condições de otimalidade sejam satisfeitas. Tendo em consideração que os problemas de otimização, podem apresentar um número de variáveis de projeto e constrangimentos muito elevado, que a função objetivo de um problema e as respectivas funções dos constrangimentos podem ser funções não lineares e que além disso estas funções podem ser funções implícitas das variáveis de projeto, torna-se conveniente desenvolver métodos numéricos para resolverem problemas de otimização. Todos os algoritmos de otimização conduzem a um processo iterativo que realiza uma procura organizada de ponto para ponto no espaço de projeto. Este processo iterativo pode ser resumido através do algoritmo geral representado na tabela 3.2 que é comum aos vários problemas de otimização constrangida ou não constrangida.

Tabela 3.2: Algoritmo geral de otimização para problemas não constrangidos e constrangidos.

1ª Etapa	Estimar um ponto de partida $\mathbf{x}^{(0)}$ que representa uma estimativa inicial do ponto ótimo e inicializar o contador das iterações, $k = 0$.
2ª Etapa	Calcular uma direção de procura, $\mathbf{d}^{(k)}$, no espaço de projeto. Esta etapa depende se o problema é constrangido ou não constrangido.
3ª Etapa	Verificação da convergência do algoritmo com base nas condições de otimalidade ou na satisfação de algum critério de paragem.
4ª Etapa	Cálculo do passo ótimo α_k , na direção de procura $\mathbf{d}^{(k)}$.
5ª Etapa	Cálculo de um novo ponto no espaço de projeto, $\mathbf{x}^{(k+1)}$, fazer $k = k + 1$ e voltar à 2ª Etapa.

O procedimento para derivar as condições de otimalidade, assume que se está num ponto ótimo \mathbf{x}^* e é examinada uma pequena vizinhança em sua volta, para estudar as propriedades da função objetivo, como o declive e a curvatura através das suas derivadas. Como se considera uma pequena vizinhança, os algoritmos de otimização utilizados na presente dissertação, consideram que a função objetivo original pode ser aproximada por polinómios, usando uma expansão em série de Taylor até ao termo de segunda ordem. Assumindo uma função de n variáveis, $f(\mathbf{x})$ a expansão em série de Taylor até ao termo de segunda ordem é:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T H(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} \quad (3.32)$$

A notação \mathbf{x} , \mathbf{x}^* , $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ representa vetores de dimensão n , $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ é o vetor gradiente de dimensão n e $H(\mathbf{x}^*)$ é a matriz Hessiana de dimensão $n \times n$. O cálculo do novo ponto no espaço de projeto é feito através da equação (3.33), e como se depreende da tabela 3.2 é decomposto por duas partes, a determinação da direção de procura, $\mathbf{d}^{(k)}$, e a determinação do passo ótimo α_k , que corresponde ao quanto se avança na direção de procura.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \quad (3.33)$$

3.4.1.1 Quasi-Newton

Na presente dissertação para resolver o problema de otimização não constrangido, correspondente ao problema da minimização da *compliance*, foi utilizado o método numérico quasi-Newton através da utilização do comando *fminunc* da *toolbox* de otimização do *software* MATLAB. O método quasi-Newton utiliza a informação do declive e da curvatura da função objetivo para construir um modelo aproximado desta, numa pequena vizinhança em torno do ponto de projeto atual, através da expansão em série de Taylor até ao termo de segunda ordem. Deste modo o conjunto de problemas, que o algoritmo quasi-Newton consegue resolver, são formulados da seguinte maneira:

$$\min_{\mathbf{d}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{d}^T H(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + f(\mathbf{x}^*) \quad (3.34)$$

Para calcular a direção de procura é utilizada a equação (3.35), que se obtém através da aplicação das condições de otimalidade para a existência de um mínimo local num problema de otimização não constrangido.

$$\mathbf{d}^{(k)} = -H_k^{(-1)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.35)$$

O método de Newton convencional calcula a matriz Hessiana numericamente, o que corresponde a calcular $n(n+1)/2$ segundas derivadas da função objetivo, $f(\mathbf{x})$, por diferenças finitas, o que requer um custo computacional bastante elevado. Por outro lado, o método quasi-Newton evita este problema, pois utiliza uma expressão analítica para calcular a matriz Hessiana. A equação que conduz a uma melhor aproximação da matriz Hessiana é a formula BFGS que foi desenvolvida por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno [14].

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T s_k} - \frac{H_k s_k s_k^T H_k^T}{s_k^T H_k s_k} \quad (3.36)$$

Onde

$$s_k = x_{k+1} - x_k \quad (3.37)$$

$$q_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \quad (3.38)$$

Dada uma direção de procura $\mathbf{d}^{(k)}$, a determinação do passo ótimo é sempre um problema de otimização unidimensional para minimizar $f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)})$, ou seja, seguido a direção de procura $\mathbf{d}^{(k)}$ o algoritmo desloca-se o máximo possível para reduzir a função objetivo. Normalmente a aplicação de métodos analíticos para resolver este problema é complicado, o que levou ao estabelecimento de métodos numéricos chamados algoritmos de pesquisa em linha (*line search methods*) tais como o método da bissecção ou método da secção dourada. O método quasi-Newton é utilizado na presente dissertação para resolver um problema de otimização não constrangido, no entanto este método também pode ser utilizado para resolver problemas constrangidos. Contudo para que tal seja possível são aplicados métodos de transformação para se passar de um problema constrangido a um problema não constrangido. A ideia básica destes métodos de transformação é construir uma função objetivo $\varphi = (\mathbf{x}, \mathbf{r})$ a partir da função objetivo original $f(\mathbf{x})$.

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{x}) + P(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}), \mathbf{r}) \quad (3.39)$$

A função P é uma função de penalidade construída pelas funções dos constrangimentos de igualdade, pelas funções dos constrangimentos de desigualdade e pelo vetor \mathbf{r} de parâmetros de penalidade que penalizam a função $f(\mathbf{x})$ sempre que os constrangimentos são violados. A solução do problema não constrangido deve convergir para a solução do problema constrangido original. A forma da função P depende do método de transformação utilizado. Um dos métodos utilizados é o Método da Lagrangeana Aumentada.

O algoritmo quasi-Newton pode ser resumido no seguinte fluxograma:

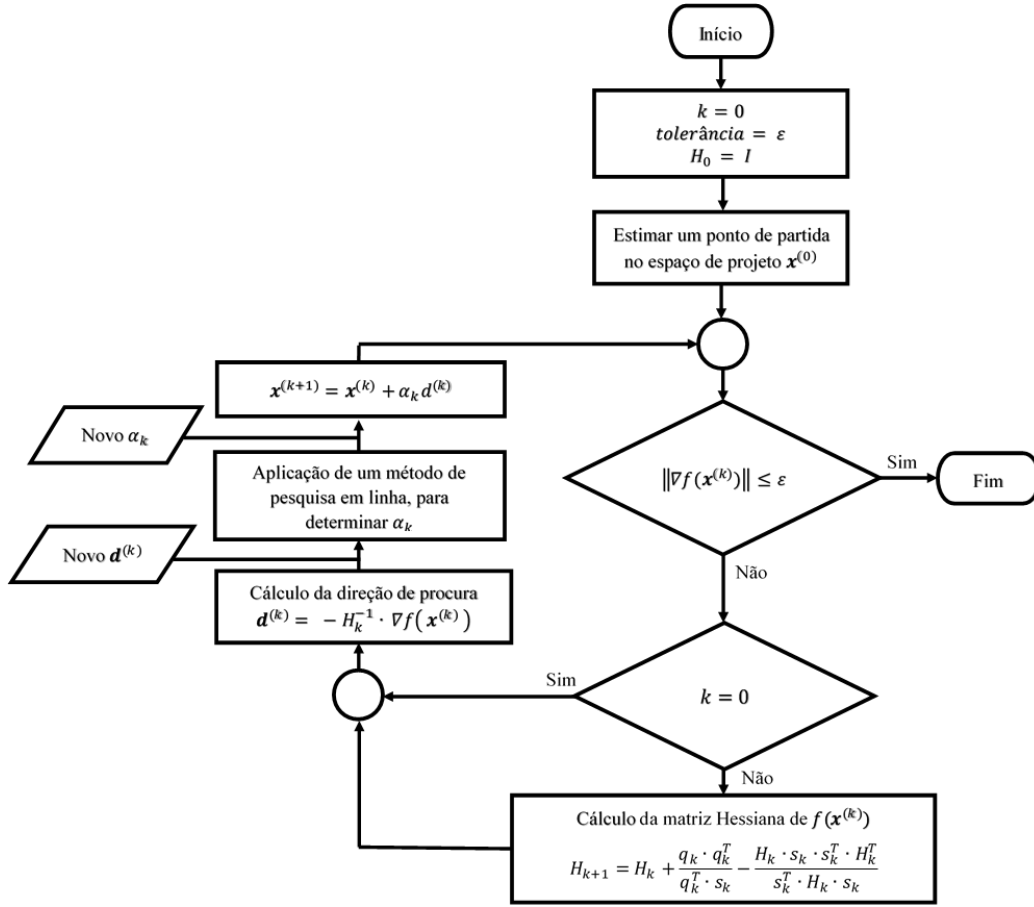


Figura 3.9: Fluxograma do algoritmo quasi-Newton.

3.4.1.2 Programação quadrática sequencial

Além dos métodos de transformação mencionados na secção anterior, usados para resolver problemas de otimização não constrangidos, também foram desenvolvidos métodos numéricos para resolver diretamente problemas de otimização constrangidos. Na presente dissertação foi utilizado o método de programação sequencial quadrática (SQP) para resolver problemas de programação não linear constrangidos. A utilização deste algoritmo é feita através do comando *fmincon* da *toolbox* de otimização do *software* MATLAB. O algoritmo SQP é considerado como um método capaz de resolver uma grande variedade de problemas. O objetivo deste algoritmo é transformar o problema de otimização original num problema simplificado que se designa por problema de programação quadrática (QP), deste modo o SQP é visto como um algoritmo que resolve uma sequência de subproblemas de otimização. No problema QP a função objetivo é aproximada por uma função quadrática, através de uma expansão em série de Taylor até ao termo de segunda ordem, enquanto as funções dos constrangimentos são aproximadas por funções

lineares utilizando a expansão em série de Taylor até ao termo de primeira ordem. A cada iteração do algoritmo SQP é gerado e resolvido um subproblema QP que se formula da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T H(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + f(\mathbf{x}^*) \\ \text{Sujeito a} \quad & \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \nabla h_k(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + h_k(\mathbf{x}^*) = 0 \quad k = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.40)$$

Onde a matriz Hessiana do problema QP corresponde à matriz Hessiana da função Lagrangeana, que para um problema de otimização restrangido é definida pela seguinte equação:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_g, \lambda_h) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_{g,i} (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2) + \sum_{k=1}^p \lambda_{h,k} h_k(\mathbf{x}) \quad (3.41)$$

Na equação anterior, λ_g e λ_h , correspondem aos m multiplicadores de Lagrange associados aos restrangimentos de desigualdade e aos p multiplicadores de Lagrange associados aos restrangimentos de igualdade, respetivamente, enquanto s_i é uma variável artificial que serve para transformar os restrangimentos de desigualdade em restrangimentos de igualdade. A cada iteração do algoritmo SQP é feita uma estimativa da matriz Hessiana da função Lagrangeana através da utilização da formula BFGS (equação 3.36), onde o vetor q_k é definido por:

$$q_k = \nabla L(x_{k+1}, \lambda_g, \lambda_h) - \nabla L(x_k, \lambda_g, \lambda_h) \quad (3.42)$$

A resolução do problema QP é feita aplicando o método dos pontos interiores, através da utilização do comando *quadprog* da *toolbox* de otimização do MATLAB. Este algoritmo baseia-se na aplicação das condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para a obtenção da direção de procura $\mathbf{d}^{(k)}$ e dos valor dos multiplicadores de Lagrange. A determinação do parâmetro α_k é bastante importante para forçar a convergência do algoritmo, este parâmetro é calculado através da utilização de um método de pesquisa em linha que diminua o valor da função objetivo e que garante a satisfação dos restrangimentos. O fluxograma da figura 3.10 ilustra o funcionamento do algoritmo SQP.

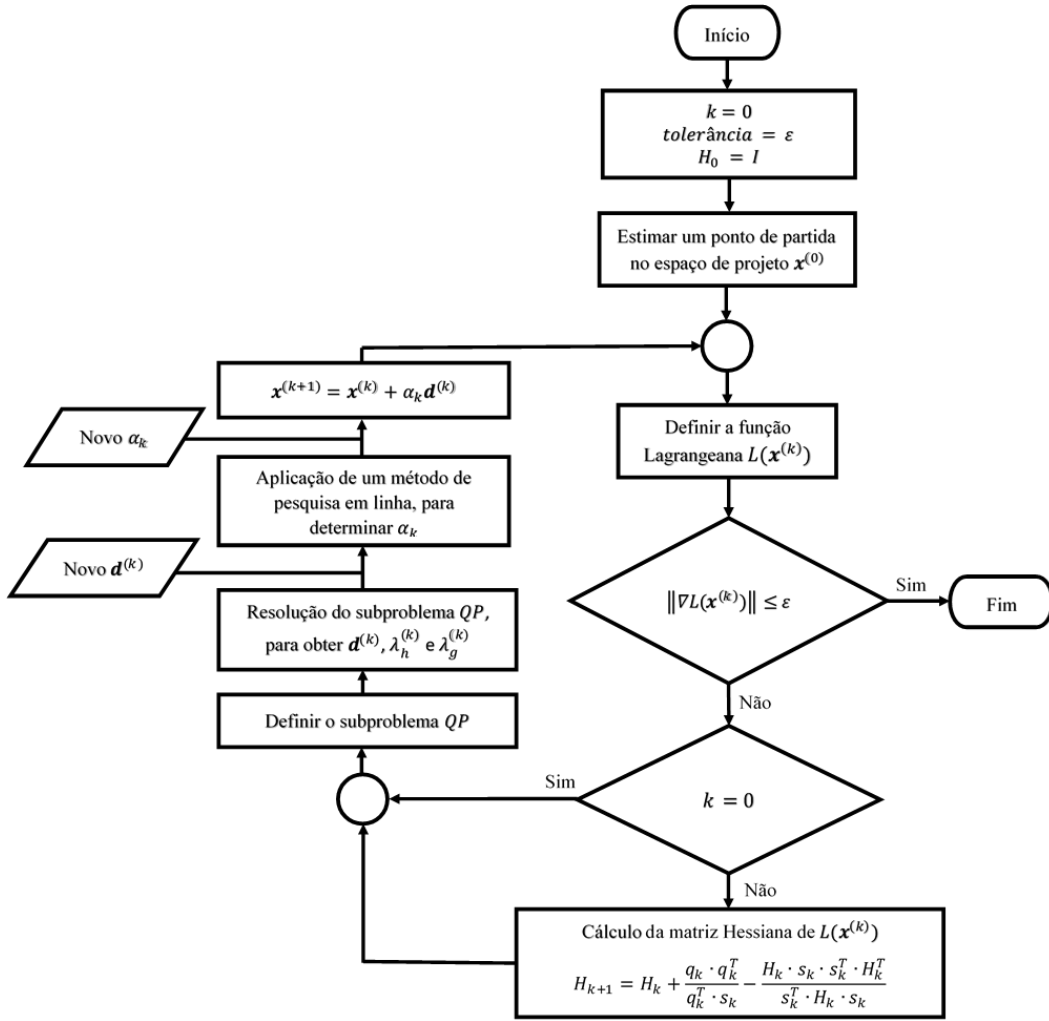


Figura 3.10: Fluxograma do algoritmo SQP.

3.4.2 Avaliação de erro

Para medir a qualidade dos resultados obtidos através dos algoritmos de otimização, é necessário quantificar o quão próximo a distribuição de tensões de von-Mises, nos elementos adjacentes à forma da inclusão, se encontra da condição de otimalidade, ou seja *Equi-Stress Principle* (ESP). Na presente dissertação é usado o erro relativo, RE , para avaliar a qualidade dos resultados obtidos.

$$RE[\%] = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} \right| \cdot 100 \quad (3.43)$$

Onde σ_{max} e σ_{min} são a tensão máxima e mínima de von-Mises ao longo da fronteira da inclusão, respetivamente. Quando o RE se aproxima de zero a distribuição de tensão de von-Mises torna-se uniforme ao longo da fronteira da inclusão, satisfazendo-se o ESP.

3.4.3 Resolução de equações não lineares

A satisfação dos constrangimentos de volume dos problemas de otimização apresentados anteriormente e que se definem através das equações (3.28), (3.29) e (3.31) é feita através da resolução de uma equação não linear. Por este motivo, nesta secção apresenta-se o método de Newton, que é um dos utilizados para obter, por via aproximada, soluções de equações não-lineares. O problema a resolver consiste na determinação dos valores de x que tornam nulo o valor da função f , ou seja resolver a seguinte equação:

$$f(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.44)$$

No método de Newton $f(\mathbf{x})$ é pelo menos uma função continua na vizinhança das suas raízes, e é aproximada pela sua tangente, e a intersecção desta com o eixo dos xx é tomada como o novo valor da aproximação à raiz de $f(\mathbf{x})$. Um novo ponto no espaço de projeto é calculado através da seguinte expressão:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{f(\mathbf{x}_k)}{f'(\mathbf{x}_k)} \quad (3.45)$$

Conclui-se que partindo de uma estimativa inicial \mathbf{x}_0 , a equação anterior gera uma sequência de pontos \mathbf{x}_k que convergirá para uma raiz da função f . Nota-se que para o cálculo do novo ponto no espaço de projeto é necessário programar a função f e a respetiva derivada f' .

3.4.4 Gradiente numérico

Em várias circunstâncias é necessário obter valores de derivadas de uma função, sem recorrer à respetiva expressão analítica, por esta não ser conhecida ou por ser demasiado complicada de obter. Situações destas surgem nomeadamente em problemas de otimização em que é necessário determinar extremos de funções, que na maior parte das vezes não têm expressão analítica conhecida. Deste modo é necessário ter métodos alternativos à derivação analítica que permitam obter valores com precisão necessária. Um desses métodos é o das diferenças finitas, que na presente dissertação é utilizado para calcular a derivada da equação (3.45).

Neste método, para aproximar o gradiente de uma função por diferenças finitas, assume-se que esta é contínua e diferenciável. Usando a definição de derivada parcial, podem ser deduzidas várias expressões para avaliar numericamente a derivada num determinado ponto, substituindo a perturbação infinitesimal por uma variação finita.

- Diferenças finitas progressivas

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_i, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.46)$$

- Diferenças finitas centrais

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_i, \dots, x_i + \Delta x_i/2, \dots, x_n) - f(x_i, \dots, x_i - \Delta x_i/2, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.47)$$

- Diferenças finitas retroativas

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) - f(x_i, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (3.48)$$

3.4.5 Integração numérica

De modo a satisfazer os constrangimentos de volume dos problemas de otimização de forma considerados nesta dissertação, é necessário a cada iteração do algoritmo de otimização calcular a área das inclusões em função das variáveis de projeto. Na presente dissertação são utilizadas expressões analíticas para modelar a forma de inclusões, cujas áreas não são possíveis de obter por métodos analíticos. Deste modo, é necessário recorrer a métodos numéricos que permitam obter valores aproximados da área das inclusões. O processo de obter valores aproximados para o integral de uma função f real definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ designa-se por integração numérica.

A chave para a solução dos problemas de integração numérica consiste essencialmente em aproximar a função f por outra função cujo integral seja fácil de calcular. Este objetivo é conseguido recorrendo a polinómios interpoladores de f . Considere-se p_n como o polinómio interpolador de grau $\leq n$ que interpola a função f nos pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n . Este polinómio representa-se da seguinte forma:

$$p_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (3.49)$$

Onde $L_i(x)$ são os polinómios de Lagrange, que são obtidos por:

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \quad (3.50)$$

Sendo assim, é fácil ver que:

$$\int_a^b p_n dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx \quad (3.51)$$

Fazendo:

$$\alpha_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad (3.52)$$

Logo, pode-se escrever:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad (3.53)$$

A expressão anterior é utilizada para aproximar $I(f)$ e designa-se por fórmula de quadratura, e os α_i por coeficientes ou pesos dessa regra [28]. Consoante o valor de n obtêm-se diferentes regras de integração. Resumindo, o cálculo exato do integral foi

substituído pelo o cálculo de uma soma ponderada de valores da função integranda. Na presente dissertação para calcular a área das inclusões, presentes nas células de base do material celular, foi utilizada a regra de Simpson composta. Este método utiliza um polinómio interpolador de grau dois e considera que este passa nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = (b - a)/2$ e $x_3 = b$, assim, o valor aproximado do integral da expressão analítica que se pretende integrar é dado por:

$$I_S = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (3.54)$$

A equação anterior constitui a regra de integração de Simpson simples. Considere-se agora uma subdivisão de $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de igual comprimento $h = b - a/m$, tal que $k = 1, \dots, m$. Aplicando o método da quadratura simples a cada um dos subintervalos obtêm-se o método da quadratura composto que é dado por:

$$I(f) = \sum_{k=0}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \alpha_i f(x_i) \quad (3.55)$$

Aplicando a regra de Simpson simples a cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ é obtida a seguinte equação, que se designa por regra de simpson composta.

$$I_S^m = \frac{h}{6} \sum_{k=0}^m \left(f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k) \right) \quad (3.56)$$

Capítulo 4

Parametrização da forma da inclusão

No presente trabalho pretende-se determinar a forma ótima de inclusões presentes num domínio rectangular, que constituem a mais pequena heterogeneidade de um material celular. A forma ótima da inclusão é determinada através da resolução de um problema de otimização de forma, onde a parametrização utilizada consiste em descrever a fronteira da inclusão através de uma expressão analítica que controla a posição dos nós da fronteira, que estão diretamente relacionados com os nós da malha de elementos finitos. Nesta dissertação consideram-se duas equações distintas para descrever a curva da inclusão no plano. Na primeira parametrização utilizada, assume-se que a inclusão é modelada pela equação da superelipse. Esta equação é definida apenas através de três parâmetros, o que limita bastante a flexibilidade na descrição geométrica da fronteira. A descrição da curva da inclusão através da equação da superelipse já foi feita por alguns autores como se pode ver em [27, 39]. Posteriormente utilizou-se uma parametrização muito mais flexível, em que a curva da inclusão é descrita por uma equação que se designa superformula. Esta equação é controlada por mais parâmetros, o que permite uma liberdade muito maior na descrição geométrica da fronteira de projeto.

4.1 Superelipse

O conjunto das formas geométricas descritas por círculos, elipses, quadrados e retângulos, estão todas incluídas na mesma família de curvas (primitivas geométricas) e podem ser descritas por uma única equação matemática, a equação da superelipse. Esta equação foi introduzida por Gabriel Lamé em 1818 [18]. Em coordenadas cartesianas a equação da superelipse é definida por:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\eta + \left(\frac{y}{b}\right)^\eta = 1 \quad (4.1)$$

Na equação anterior a , b e η são números reais positivos, em que a e b representam os raios maior e menor da superelipse, e o parâmetro η controla a curvatura da forma da superelipse. Verifica-se que utilizando a equação da superelipse para descrever a inclusão, a forma desta é controlada apenas por três variáveis de projeto (a , b , η). A figura 4.1 mostra

a parametrização utilizada para descrever um furo em uma placa através da equação da superelipse.

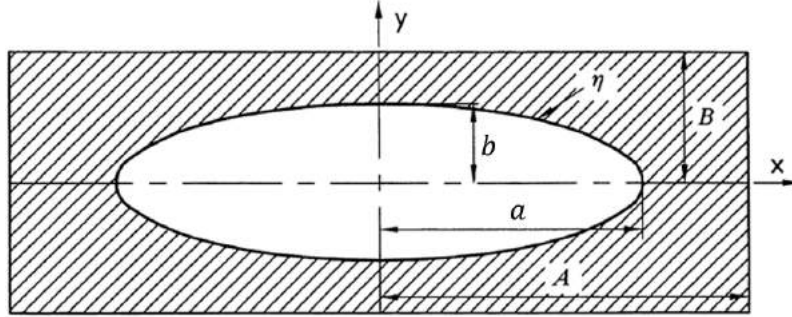


Figura 4.1: Parametrização da forma de uma inclusão num domínio rectangular, utilizando três variáveis de projeto (a, b, η), adaptado de [27].

Para o caso em que a fração volúmica de material é conhecida, ou seja é conhecida a área da inclusão presente na microestrutura do material celular, o número de variáveis de projeto reduz-se a duas ($a/b, \eta$). A área de uma forma geométrica gerada através da equação da superelipse pode ser obtida resolvendo o seguinte integral:

$$S = 4 \int_0^a y(x) dx \quad (4.2)$$

Utilizando a equação fundamental da trigonometria e comparando esta com a equação da superelipse tem-se:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\eta = \sin^2(\theta) \Rightarrow x = a \cdot \sin^{\frac{2}{\eta}}(\theta) \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^\eta = \cos^2(\theta) \Rightarrow y = b \cdot \cos^{\frac{2}{\eta}}(\theta) \quad (4.4)$$

Substituindo as equações (4.3) e (4.4) na equação (4.2) obtêm-se:

$$S = \frac{8ab}{\eta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{\eta}+1}(\theta) \cdot \sin^{\frac{2}{\eta}-1}(\theta) d\theta \quad (4.5)$$

O integral da equação anterior pode ser resolvido utilizando a seguinte expressão trigonométrica [19].

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\beta(\theta) \cdot \sin^\alpha(\theta) d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) \quad \text{com } \alpha, \beta > -1 \quad (4.6)$$

Onde B^1 representa a função beta. Utilizando a expressão trigonométrica anterior, pode-se reescrever a equação (4.5) da seguinte maneira:

$$S = \frac{4ab}{\eta} B\left(\frac{1}{\eta}, \frac{1}{\eta} + 1\right) \quad (4.7)$$

¹ A função beta é definida pelo seguinte integral definido: $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

Finalmente relacionado a função beta com a função gamma, Γ^1 , obtém-se a seguinte expressão para calcular a área de uma superforma gerada pela equação da superelipse [19].

$$S = \frac{4ab}{\eta} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\eta} + 1\right)} \quad (4.8)$$

Através da equação anterior verifica-se que os raios maior a e menor b da superelipse estão relacionados através da fração volúmica de material. Assim para uma inclusão cujo valor da área seja conhecido, as variáveis de projeto reduzem-se de três para duas. Considerando que a inclusão é simétrica em relação à linha $x = y$, tem-se que $a = b$, restando apenas otimizar o parâmetro η . Esta parametrização, devido ao reduzido número de variáveis de projeto é bastante limitada e pouco flexível. No entanto, para microestruturas com inclusões de fracções volúmicas muito pequenas ou muito grandes, esta parametrização fornece bons resultados numéricos que podem ser comparados com alguns resultados teóricos [27].

4.2 Superformula

A equação da superformula (Gielis Formula) é uma generalização da equação da superelipse e foi proposta pelo botânico e investigador Johan Gielis da universidade de Antuérpia, em 2003 [16, 17]. A equação proposta por Gielis surgiu com o objetivo de reproduzir vários padrões e formas geométricas que se encontram na natureza. A principal vantagem da equação da superformula em relação à equação da superelipse, é que esta apresenta uma simetria rotacional muito maior e consegue reproduzir formas geométricas assimétricas.

A equação da superformula pode ser deduzida a partir da equação da superelipse, começando por converter esta última de coordenadas cartesianas (x, y) para coordenadas polares (r, φ) . Posteriormente introduz-se a variável de simetria $m/4$ para que as formas geométricas geradas pela equação da superformula possam ter mais planos de simetria. Finalmente assume-se que os expoentes η podem ser diferentes. Assim conclui-se que a equação da superformula fica definida pela seguinte expressão:

$$r(\varphi) = \left[\left(\left| \frac{1}{a} \cos\left(\frac{m\varphi}{4}\right) \right| \right)^{n_2} + \left(\left| \frac{1}{b} \sin\left(\frac{m\varphi}{4}\right) \right| \right)^{n_3} \right]^{-\frac{1}{n_1}} \quad (4.9)$$

Verifica-se que as formas geométricas descritas pela equação da superformula são controladas por seis parâmetros distintos. Na equação anterior o parâmetro m controla a simetria rotacional. Os parâmetros a e b controlam o tamanho da superforma e os expoentes n_1 , n_2 e n_3 controlam a curvatura da fronteira da inclusão descrita pela equação da superformula, fazendo com que seja possível obter cantos mais ou menos angulosos e

¹ A função gama é definida pelo seguinte integral impróprio convergente: $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$.

lados côncavos ou convexos. Quando $m = 4$ e $n_1 = n_2 = n_3 = n$ obtém-se o caso particular da equação da superelipse em coordenadas polares. A figura 4.2 mostra vários exemplos de formas geométricas descritas pela equação da superformula.

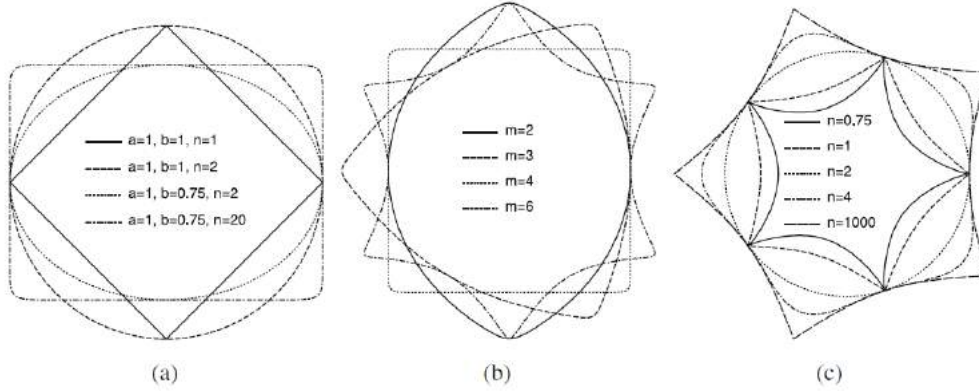


Figura 4.2: Exemplos de curvas descritas pela equação da superformula: a) formas com $m = 4$ e $n_1 = n_2 = n_3 = n$; b) formas com diferente simetria rotacional, $a = b = 1$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 30$; c) Formas com diferente curvatura, $m = 5$, $a = b = 1$ e $n_1 = n_2 = n_3 = 100$; extraído de [26].

Existe um conjunto de formas mais ou menos complexas definidas através de uma única equação, i.e., a superformula. No entanto, existem várias curvas que também podem ser geradas como a combinação de outras mais simples, com o objetivo de gerar formas ainda mais complexas. Por outras palavras, podem ser somadas várias superformulas. Deste modo surge uma nova equação, designada por k-type Gielis Formula, e que é definida pelo seguinte somatório:

$$r(\varphi) = \sum_{i=1}^k \left[\left(\left| \frac{1}{a_i} \cos\left(\frac{m_i \varphi}{4}\right) \right| \right)^{n_{2i}} + \left(\left| \frac{1}{b_i} \sin\left(\frac{m_i \varphi}{4}\right) \right| \right)^{n_{3i}} \right]^{-\frac{1}{n_{1i}}} \quad (4.10)$$

A utilização da equação anterior para descrever a forma das inclusões, permite uma variabilidade muito grande da fronteira de projeto. Esta flexibilidade pode ser tanto maior quanto maior for o número de superformulas somadas. Como foi referido anteriormente, cada superformula utilizada é definida através de seis parâmetros (n_1, n_2, n_3, m, a, b). No entanto, o número de variáveis de projeto dos problemas de otimização desta dissertação, são só cinco por cada superformula utilizada, pois o parâmetro b é determinado através da satisfação do constrangimento de igualdade de volume, ou seja através da resolução da seguinte equação:

$$A(n_{1i}, n_{2i}, n_{3i}, m_i, a_i, b) - A^* = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (4.11)$$

A equação anterior é resolvida através da aplicação do método de Newton apresentado na secção 3.4.3. Analisando a equação anterior a única incógnita por determinar é o parâmetro b , pois todos os outros parâmetros são variáveis de projeto e por isso são determinados pelo algoritmo de otimização (quasi-Newton ou SQP). Para que se consiga

resolver a equação 4.11, torna-se importante encontrar métodos que permitam calcular as áreas das inclusões, geradas pela superformula ou soma de superformulas.

4.3 Metodologia para determinar a área de inclusões geradas pela k-type Gielis Formula

As áreas de inclusões descritas pela equação da superelipse são calculadas através de uma expressão analítica (equação 4.8). No entanto, para determinar a área de inclusões descritas pela k-type Gielis Formula, recorre-se à aplicação de métodos numéricos.

Para os problemas de otimização em que se consideram carregamentos onde as tensões macroscópicas têm o mesmo sinal, o cálculo da área da inclusão inicia-se com a divisão do domínio da k-type Gielis formula em n subintervalos, como está representado na seguinte figura.

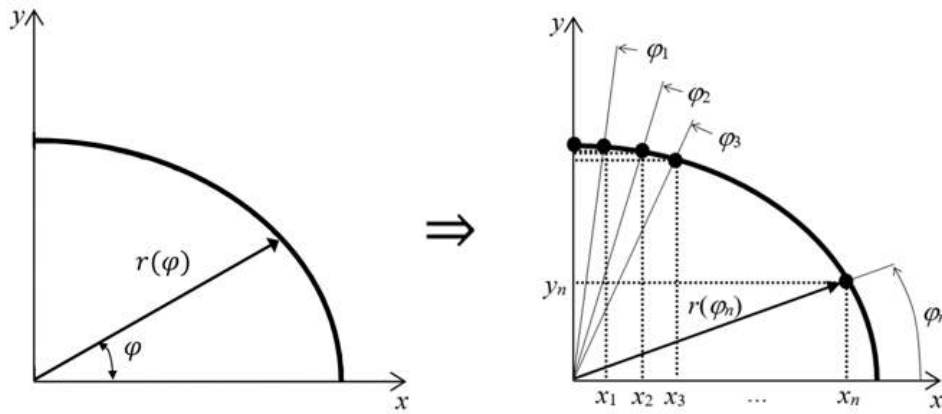


Figura 4.3: Divisão do domínio da k-type Gielis Formula em vários subintervalos.

Posteriormente os vários valores dos ângulos φ_i são guardados num vetor de dimensão n . Em seguida é gerado um novo vetor da mesma dimensão, onde são guardadas as coordenadas y_i , cujos valores são obtidos através da aplicação da seguinte expressão: $y_i = r(\varphi_i) \cdot \sin(\varphi_i)$. A área da inclusão é obtida aplicando a regra de Simpson, que tem como entrada o vetor constituído pelas coordenadas y_i .

Se for considerando um carregamento de corte, ou seja um carregamento onde as tensões macroscópicas têm sinais opostos, o Equi-Stress Principle já não é verificado. Vigderauz conseguiu resolver o problema da minimização da *compliance* e obter formas ótimas das inclusões, correspondentes a furos quadrados com cantos angulosos e lados suavemente arredondados [33]. Estas formas obrigam a que a tensão circunferencial, nos elementos adjacentes à inclusão mude de sinal no cantos angulosos, ou seja o Equi-Stress Principle só é satisfeito em módulo. Para resolver o problema de otimização de forma com um carregamento de corte, assume-se que a inclusão resulta da intersecção de duas k-type Gielis Formulas. Na figura 4.4 está representado o *design* inicial, de onde se inicia a

resolução do problema de otimização.

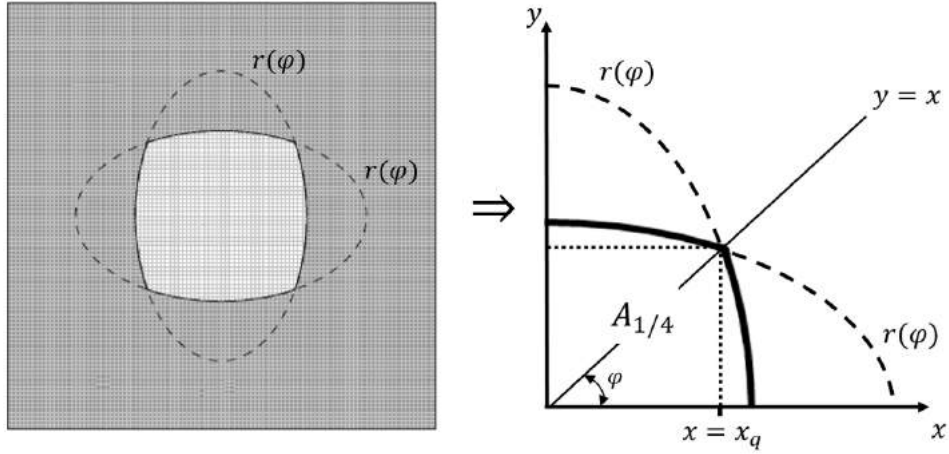


Figura 4.4: *Design* inicial da célula de base, para resolver o problema da minimização da *compliance* com um carregamento de corte.

O procedimento para calcular a área de uma inclusão gerada pela intersecção de duas k-type Gielis Formulas é análogo ao caso em que a inclusão é descrita apenas por uma equação. Primeiro, considera-se o conjunto de pontos pertencentes ao intervalo $[0, x_q]$, onde a coordenada x_q resulta da intersecção de uma das k-type Gielis Formula com reta $y = x$. Depois o intervalo considerado é subdividido em n subintervalos. Posteriormente para determinar o vetor constituído pelas coordenadas y_i é utilizada a expressão $y_i = r(\varphi_i) \cdot \sin(\varphi_i)$. Após a realização das operações anteriores é aplicada a seguinte equação para determinar a área da inclusão:

$$A = 4A_{1/4} = 4 \left[x_q^2 + 2 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} r(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi - x_q^2 \right) \right] \quad (4.12)$$

O integral da equação anterior é resolvido através da aplicação a regra de Simpson composta.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Formas ótimas

Na presente dissertação, são estudados materiais celulares de microestrutura periódica, em que a forma ótima das inclusões das células de base é obtida através resolução dos problemas de otimização apresentados anteriormente (secção 3.4) e definidos pelas equações (3.28), (3.29) e (3.31). Nestes problemas consideram-se três carregamentos distintos e vários constrangimentos de volume de modo a obter uma boa diversidade de formas ótimas. Assume-se que o material celular é composto por um padrão periódico de 5x5 células de base, no entanto, os resultados apresentados em seguida referem-se à célula de base central do padrão periódico. Verificou-se que as soluções ótimas dos problemas de otimização, dependem diretamente da fração volúmica de material, do rácio das tensões macroscópicas, das restrições de projeto utilizadas e do *design* inicial.

O material de base da microestrutura periódica é um material fictício. Assume-se que este tem um comportamento linear elástico e isotrópico, com um módulo de elasticidade unitário, $E = 1$ GPa e um coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

5.1.1 Minimização da *compliance*

5.1.1.1 Carregamento biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2$)

Nas tabelas 5.1 e 5.2, apresentam-se as distribuições de tensão de von-Mises para as microestruturas ótimas obtidas através da resolução do problema da minimização da *compliance*, considerando um carregamento biaxial onde o rácio das tensões macroscópicas é unitário. É também apresentado para cada fração volúmica de material, o valor da densidade de energia de deformação da célula de base central u , o valor máximo da tensão de von-Mises calculado através da expressão analítica $\sigma_{max}^{teo} = Tr\{\sigma_0\}/V$ e o valor máximo da tensão de von-Mises obtido através da análise de elementos finitos σ_{max}^{ANSYS} . Para avaliar a qualidade dos resultados obtidos é calculado o valor do parâmetro RE (ver equação (3.43)) e a percentagem do desvio entre σ_{max}^{teo} e σ_{max}^{ANSYS} .

Tabela 5.1: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = \sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da **superelipse** para definir a forma das inclusões.

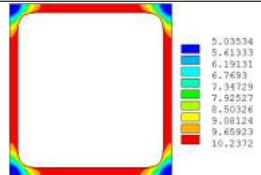
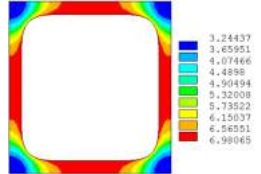
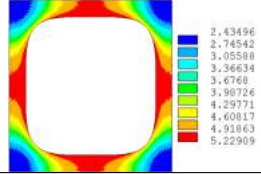
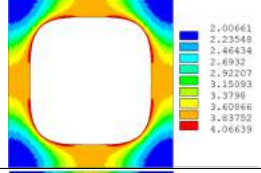
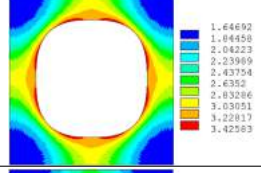
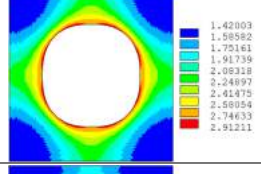
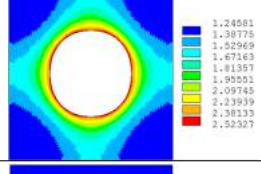
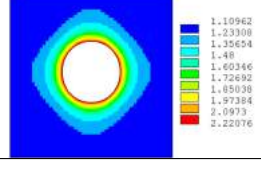
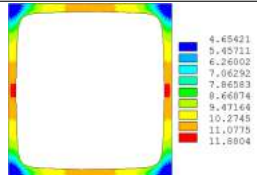
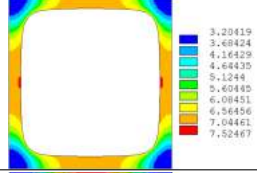
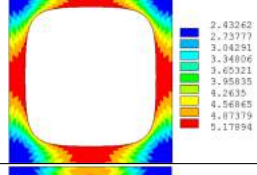
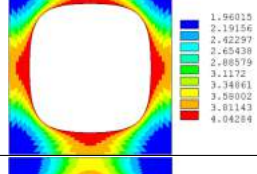
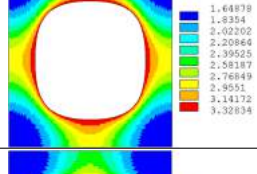
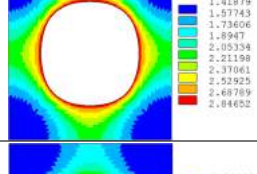
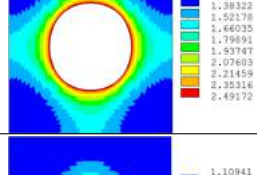
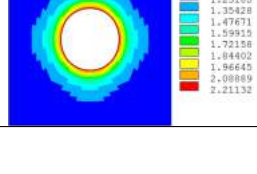
V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	8.62521	10.0	10.23	2.30	1.87	
30	5.30517	6.666	6.980	4.71	5.03	
40	3.63637	5.0	5.229	4.58	5.66	
50	2.64411	4.0	4.066	1.65	4.58	
60	1.98996	3.333	3.425	2.76	4.86	
70	1.53170	2.857	2.912	1.92	4.72	
80	1.18886	2.50	2.523	0.92	3.16	
90	0.91945	2.222	2.220	0.09	0.87	

Tabela 5.2: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = \sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da **superformula** para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	8.62482	10.0	11.88	18.80	14.39	
30	5.30348	6.666	7.524	12.87	9.07	
40	3.63638	5.0	5.178	3.56	4.09	
50	2.64120	4.0	4.042	1.05	2.55	
60	1.98971	3.333	3.328	0.15	1.15	
70	1.53166	2.857	2.846	0.38	1.24	
80	1.18891	2.50	2.491	0.36	0.74	
90	0.91947	2.222	2.211	0.49	0.81	

As figuras 5.1 e 5.2 mostram para 1/4 da célula de base, a evolução das formas ótimas das inclusões, para diferentes valores da fração volúmica de material. Estas figuras também apresentam o valor da tensão circunferencial nos elementos adjacentes às inclusões, em função de uma variável angular. Na figura 5.1 utiliza-se a equação da superelipse para descrever as formas das inclusões, enquanto a figura 5.2 modela as inclusões através da equação da superformula. Os valores dos parâmetros ótimos das equações da superelipse e da superformula podem ser consultados nas tabelas B.1 a) e B.4, respetivamente.

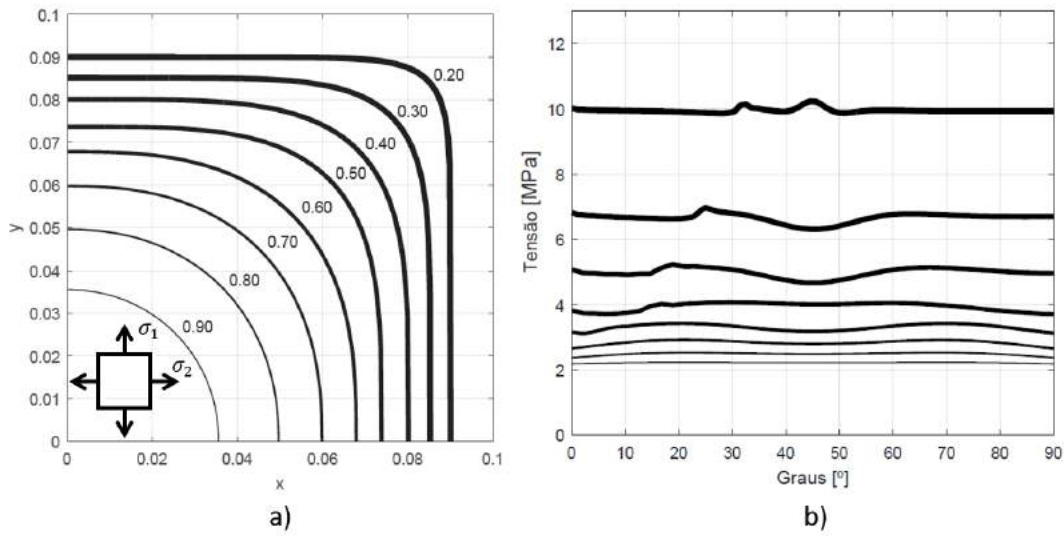


Figura 5.1: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_2 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da **superelipse**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.

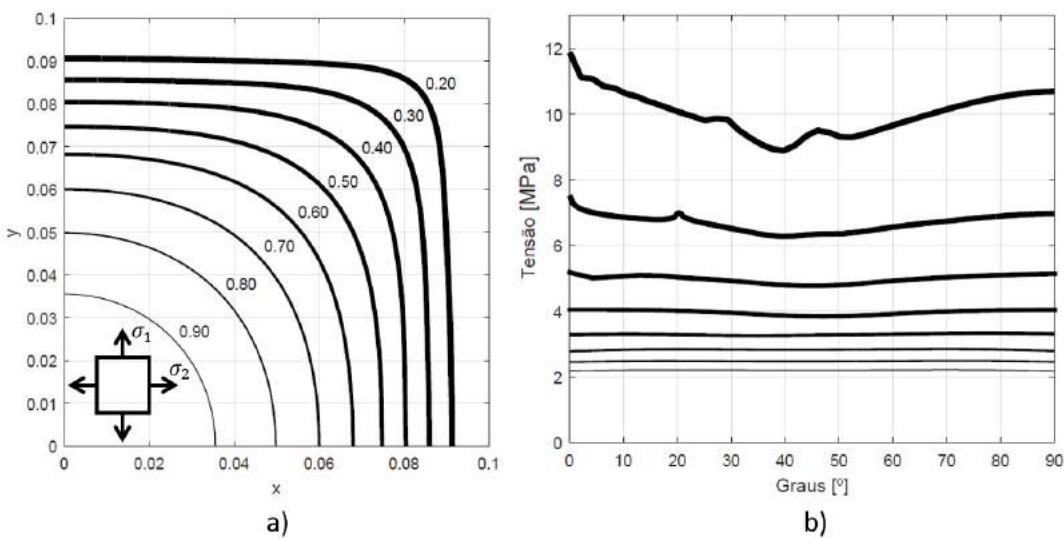


Figura 5.2: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_2 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da **superformula**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.

Através da análise das tabelas 5.1 e 5.2 e das figuras 5.1 e 5.2 verifica-se que as formas ótimas das inclusões obtidas através da parametrização da superelipse afastam-se da condição de otimalidade definida pelo *Equi-Stress Principle* para frações volúmicas de material intermédias. No entanto, o valor do parâmetro RE nunca excede os 6% o que mostra que a discrepância entre o valor máximo e mínimo da tensão de von-Mises nos elementos adjacentes à inclusão não é muito elevada. Por outro lado quando se utiliza a parametrização da superformula, a condição de otimalidade só é satisfeita para frações volúmicas de material intermédias e elevadas, sendo que o parâmetro RE aumenta com a diminuição da quantidade de material na célula de base. Na figura 5.3 é representada a sobreposição dos contornos das inclusões, definidas pelas equações da superelipse e da superformula.

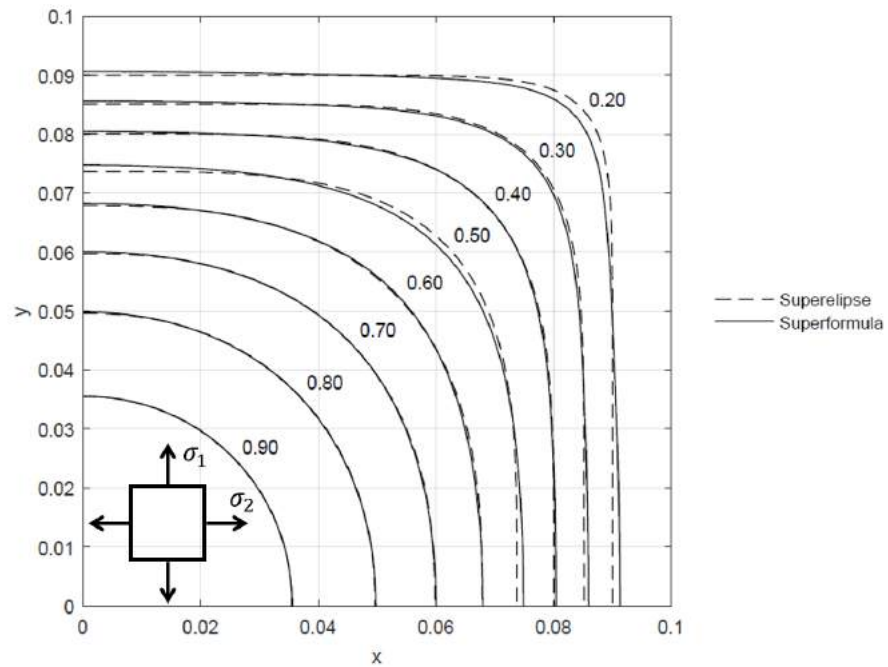


Figura 5.3: Sobreposição das formas ótimas obtidas através da equação da **superelipse** e da **superformula** para o problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = \sigma_2$).

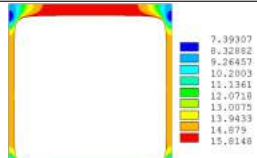
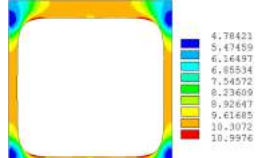
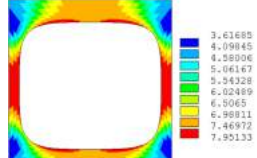
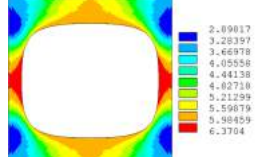
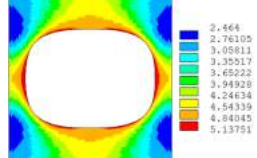
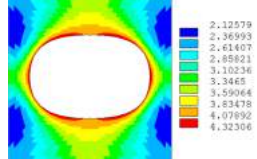
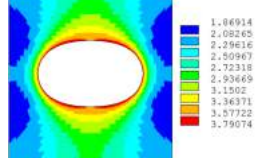
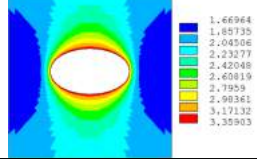
5.1.1.2 Carregamento biaxial ($\sigma_1 = 2\sigma_2$)

As tabelas 5.3 e 5.4 apresentam as distribuições de tensão de von-Mises para as microestruturas ótimas obtidas através da resolução do problema da minimização da *compliance* e sujeitas a um carregamento biaxial, onde o rácio das tensões macroscópicas é não unitário. Nestas tabelas é também calculado para cada fração volúmica de material, o valor da densidade da energia de deformação da célula de base central u , o valor máximo teórico da tensão de von-Mises σ_{max}^{teo} e o valor máximo da tensão de von-Mises obtido através da análise de elementos finitos σ_{max}^{ANSYS} . De modo a quantificar a qualidade dos resultados obtidos, calcula-se também o parâmetro RE e a percentagem do desvio entre σ_{max}^{teo} e σ_{max}^{ANSYS} .

Tabela 5.3: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da **superelipse** para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	20.1125	15.0	16.14	7.60	13.85	
30	12.3914	10.0	10.76	7.60	9.63	
40	8.51248	7.50	7.952	6.02	10.14	
50	6.22631	6.0	6.432	7.20	9.41	
60	4.76317	5.0	5.276	5.52	6.79	
70	3.75094	4.285	4.426	3.29	5.74	
80	2.99468	3.750	3.824	1.97	5.30	
90	2.39361	3.333	3.367	1.02	1.80	

Tabela 5.4: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da **k-type Gielis Formula**, com $k = 2$, para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	20.0954	15.0	15.814	5.42	7.61	
30	12.4005	10.0	10.997	9.97	12.83	
40	8.49934	7.5	7.951	6.01	10.16	
50	6.22220	6.0	6.370	6.16	8.24	
60	4.76104	5.0	5.137	2.74	7.01	
70	3.74880	4.285	4.323	0.88	5.44	
80	2.99441	3.750	3.790	1.06	3.47	
90	2.39320	3.333	3.359	0.78	1.09	

As figuras 5.4 e 5.5 mostram para 1/4 da célula de base, a evolução das formas ótimas das inclusões, considerando diferentes frações volúmicas de material. Estas figuras também representam o valor da tensão circunferencial nos elementos adjacentes à inclusão, em função de uma variável angular. Na figura 5.4 utiliza-se a equação da superelipse para descrever as formas das inclusões, enquanto a figura 5.5 é utilizada a k-type Gielis Formula, com $k = 2$. Os valores dos parâmetros ótimos das equações da superelipse e da k-type Gielis Formula podem ser consultados nas tabelas B.1 b) e B.9, respetivamente.

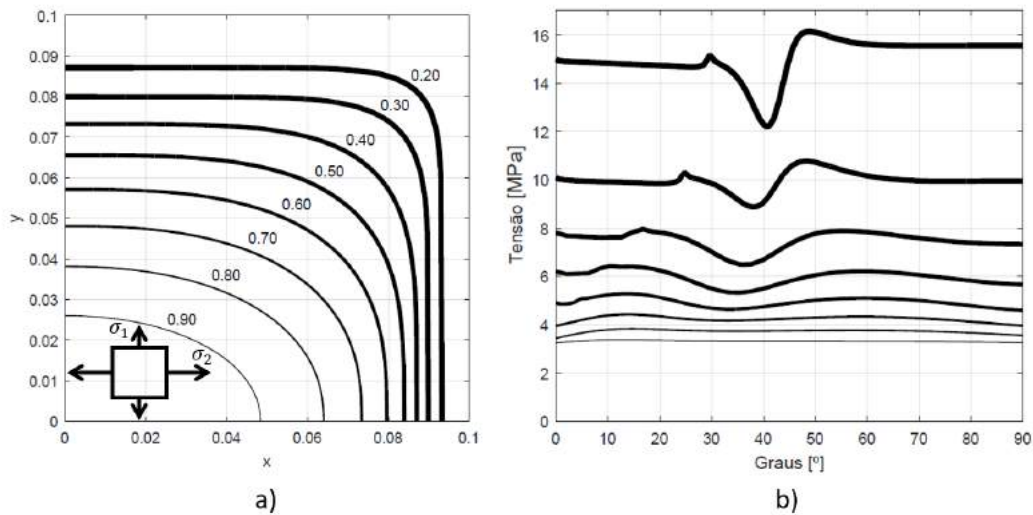


Figura 5.4: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_2 = 2\sigma_1$) para inclusões descritas pela equação da **superelipse**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.

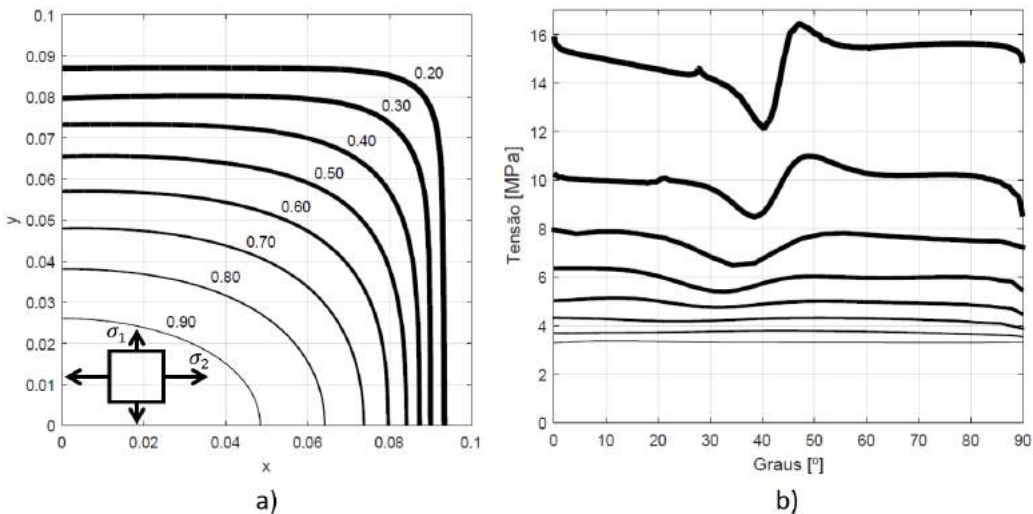


Figura 5.5: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_2 = 2\sigma_1$) para inclusões descrita pela **k-type Gielis Formula**, com $k = 2$. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.

À semelhança do que acontece para o caso em que se considera um rácio de tensões macroscópicas unitário, as microestruturas ótimas que se obtêm da minimização da *compliance* com um rácio de tensões macroscópicas não unitário também se afastam do *Equi-Stress Principle*. O algoritmo de otimização tem bastante dificuldade em convergir para uma solução ótima, devido ao facto da função objetivo deste problema ser uma função muito insensível a variações da forma da geometria da inclusão, o que faz com que este tenha bastante dificuldade em calcular derivadas por diferenças finitas e consequentemente determinar uma direção de procura. Pela análise das figuras 5.4 e 5.5 verifica-se que o valor da tensão circunferencial nos elementos adjacentes à inclusão, está longe de ser constante, o que mostra a dificuldade de encontrar soluções ótimas para este tipo de problemas. Na figura 5.6 é representada a sobreposição do contorno das inclusões, definidos pelas equações da superelipse e da superformula.

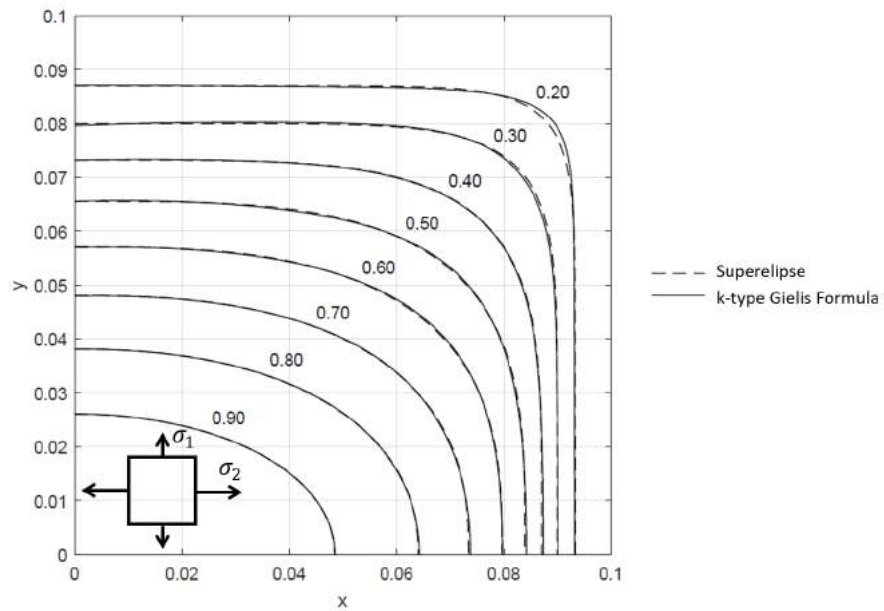


Figura 5.6: Sobreposição das formas ótimas obtidas através da equação da **superelipse** e da **k-type Giellis Formula**, com $k = 2$ para o problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).

5.1.1.3 Carregamento de corte ($\sigma_1 = -\sigma_2$)

Nas tabelas 5.5 e 5.6, apresentam-se as distribuições de tensão de von-Mises nas microestruturas ótimas, obtidas através da resolução do problema da minimização da *compliance* considerando um carregamento de corte, onde o rácio das tensões macroscópicas é unitário e negativo. Nestas tabelas é também apresentado para cada fração volumica de material, o valor da densidade de energia de deformação da célula de base central u e o valor máximo da tensão de von-Mises obtido através da análise de elementos finitos σ_{max}^{ANSYS} . Para avaliar a qualidade dos resultados obtidos calcula-se o valor do parâmetro RE .

As figuras 5.7 e 5.8 mostram para 1/4 da célula de base a evolução das formas ótimas da inclusão para diferentes frações volúmicas de material. Além disso estas figuras apresentam o valor da tensão circunferencial nos elementos adjacentes à inclusão, em função de uma variável angular. Na figura 5.1 utiliza-se a equação da superelipse para descrever a forma das inclusões, enquanto na figura 5.2 estas são modelas pela equação da superformula. Os valores dos parâmetros ótimos das equações da superelipse e da superformula podem ser consultados na secção dos anexos nas tabelas B.3 e B.7, respectivamente.

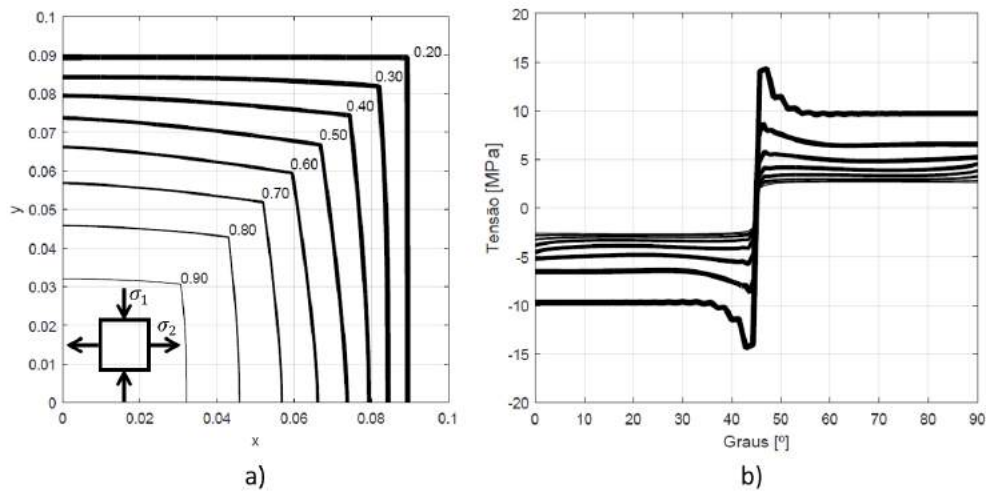


Figura 5.7: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_2 = -\sigma_2$) para inclusões descrita pela intersecção de duas **superelipses**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.

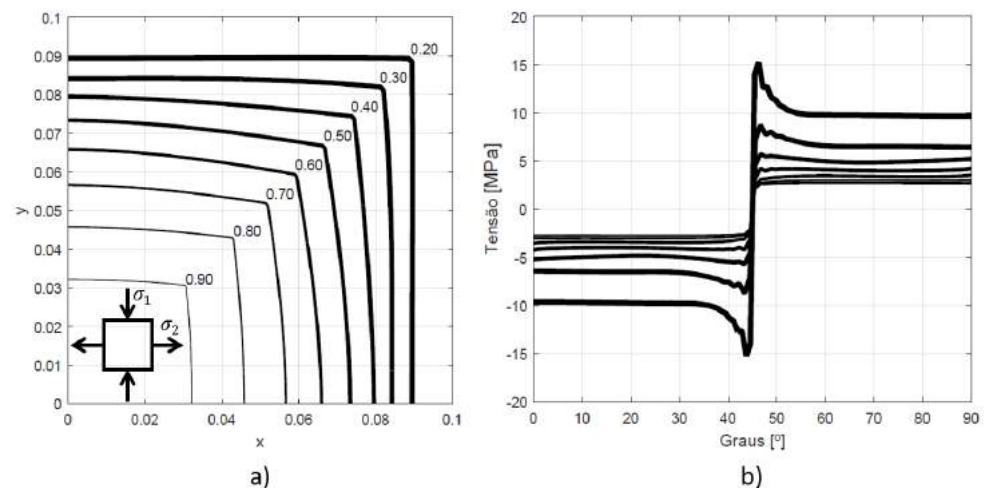


Figura 5.8: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_2 = -\sigma_2$) para inclusões descrita pela intersecção de duas **superformulas**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises [MPa] nos elementos adjacentes às inclusões.

Tabela 5.5: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = -\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da intersecção de duas **superelipses** para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{ANSYS}	RE [%]	Campo de Tensões
20	9.95284	17.24	8.87	
30	6.45229	10.47	11.0	
40	4.70403	7.491	9.18	
50	3.66380	5.849	7.70	
60	2.97558	4.819	8.43	
70	2.47105	4.031	7.93	
80	2.05783	3.315	4.15	
90	1.68144	2.734	6.49	

Tabela 5.6: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = -\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da intersecção de duas **superformulas** para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{ANSYS}	RE [%]	Campo de Tensões
20	9.97801	17.39	13.71	
30	6.46244	10.53	10.89	
40	4.70878	7.481	8.51	
50	3.66718	5.863	3.25	
60	2.97744	4.823	6.74	
70	2.47194	4.034	5.86	
80	2.05832	3.316	3.77	
90	1.68166	2.748	2.21	

Tal como foi previsto por Vigdergauz, as inclusões ótimas obtidas para o problema da minimização da *compliance* considerando um carregamento de corte, têm uma geometria quadrada com os lados ligeiramente arredondados. As inclusões obtidas aproximam-se em quase todo o domínio da variável angular do *M-Equi-Stress Principle*, no entanto, nos elementos perto dos cantos angulosos das inclusões existem picos de tensão para as frações volúmicas de material mais baixas, o que faz com que o valor do parâmetro *RE* seja elevado. A comparação das tabelas 5.5 e 5.6 mostra que a utilização de uma parametrização mais flexível da descrição geométrica da fronteira, permite obter uma qualidade de resultados superior. A figura 5.9 mostra a sobreposição do contorno das inclusões, definidos pelas equações da superelipse e da superformula.

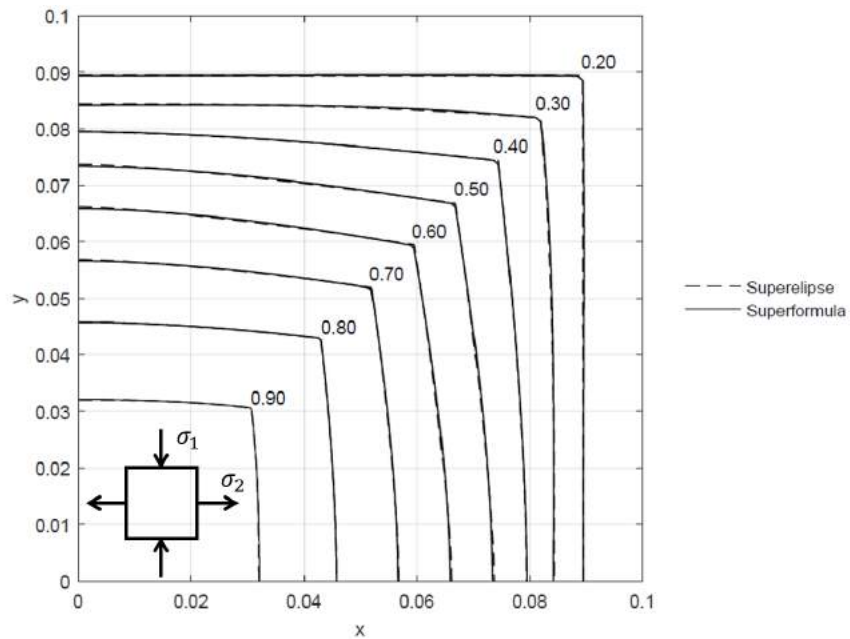



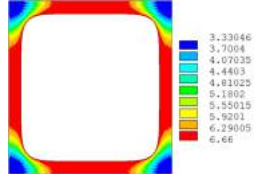
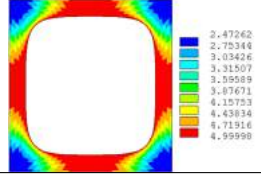
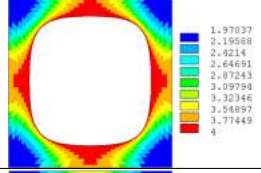
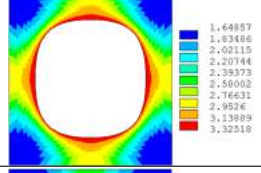
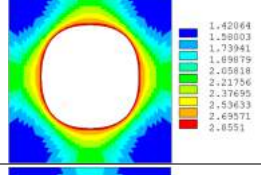
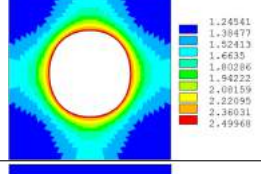
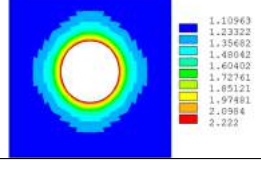
Figura 5.9: Sobreposição das formas ótimas obtidas através da intersecção de duas **supere-lipses** e duas **superformulas** para o problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = -\sigma_2$).

5.1.2 Minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão

5.1.2.1 Carregamento biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2$)

Na tabela 5.7 apresentam-se as distribuições da tensão de von-Mises nas microestruturas ótimas obtidas através da resolução do problema da minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão considerando um carregamento biaxial onde o rácio das tensões macroscópicas é unitário. Nestas tabelas é também apresentado para cada fração volúmica de material o valor da densidade de energia de deformação da célula de base central u , o valor máximo teórico da tensão de von-Mises σ_{max}^{teo} e o valor máximo da tensão de von-Mises obtido através da análise de elementos finitos σ_{max}^{ANSYS} . Para medir a qualidade dos resultados obtidos é calculado o parâmetro *RE* e a percentagem do desvio entre σ_{max}^{teo} e σ_{max}^{ANSYS} .

Tabela 5.7: Solução do problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = -\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da **superformula** para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	8.67069	10.0	10.03	0.30	0.95	
30	5.32187	6.666	6.660	0.09	0.96	
40	3.63870	5.0	4.999	0.02	1.35	
50	2.64128	4.0	4.0	0.0	1.31	
60	1.98974	3.333	3.325	2.49	0.97	
70	1.53167	2.857	2.855	0.07	1.85	
80	1.18892	2.50	2.499	0.04	1.12	
90	0.91959	2.222	2.221	0.04	0.55	

A figura 5.10 mostra para 1/4 da célula de base a evolução das formas ótimas das inclusões para diferentes frações volúmicas de material. Estas figuras também apresentam o valor da tensão circunferencial nos elementos adjacentes às inclusões, em função de uma variável angular. Nesta figura as inclusões são modeladas através da equação da superformula e os respectivos parâmetros podem ser consultados na tabela B.5.

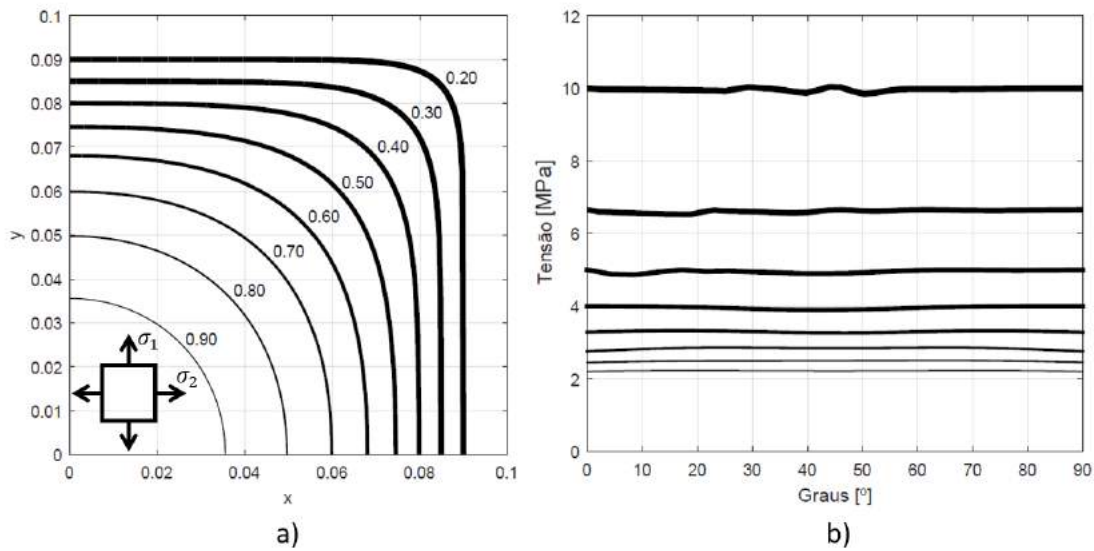


Figura 5.10: Solução do problema da minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão ($\sigma_2 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela **superformula**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.

Pela análise da tabela 5.7 e da figura 5.10 conclui-se que a introdução dos constrangimentos de tensão no problema da minimização da *compliance* permite obter resultados muito satisfatórios, pois a aproximação da distribuição de tensão de von-Mises ao *Equi-Stress Principle* é muito boa para todo o espectro de frações volúmicas de material. Pela observação do parâmetro *RE* também se conclui que a qualidade dos resultados é elevada uma vez que este é sempre inferior a 2%.

5.1.2.2 Carregamento biaxial ($\sigma_1 = 2\sigma_2$)

Na tabela 5.8 apresentam-se as distribuições de tensão de von-Mises nas microestruturas ótimas obtidas resolvendo o problema da minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão, considerando um carregamento biaxial onde o rácio das tensões macroscópicas é não unitário. Nestas tabelas é também apresentado para cada fração volúmica de material, o valor da densidade da energia de deformação da célula de base central u , o valor máximo teórico da tensão de von-Mises σ_{max}^{teo} e o valor máximo da tensão de von-Mises obtido através da análise de elementos finitos σ_{max}^{ANSYS} . De modo a quantificar a qualidade dos resultados calcula-se o parâmetro *RE* e a percentagem do desvio entre σ_{max}^{teo} e σ_{max}^{ANSYS} .

Tabela 5.8: Solução do problema da minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da **k-type Gielis Formula**, com $k = 2$, para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	20.1159	15.0	15.364	2.42	3.94	
30	12.4099	10.0	10.105	1.05	3.11	
40	8.50365	7.5	7.499	0.01	1.45	
50	6.22665	6.0	6.0	0.0	3.21	
60	4.75903	5.0	5.0	0.0	3.28	
70	3.74885	4.285	4.285	0.0	2.94	
80	2.99369	3.750	3.750	0.0	1.87	
90	2.39328	3.333	3.333	0.0	0.58	

A figura 5.11 mostra para 1/4 da célula de base a evolução das formas ótimas das inclusões, para diferentes frações volúmicas de material. Nesta figura também se representa o valor da tensão circunferencial nos elementos adjacentes às inclusões, em função de uma variável angular. Neste caso as inclusões são descritas através da k-type Gielis Formula e os respectivos parâmetros podem ser consultados na tabela B.10.

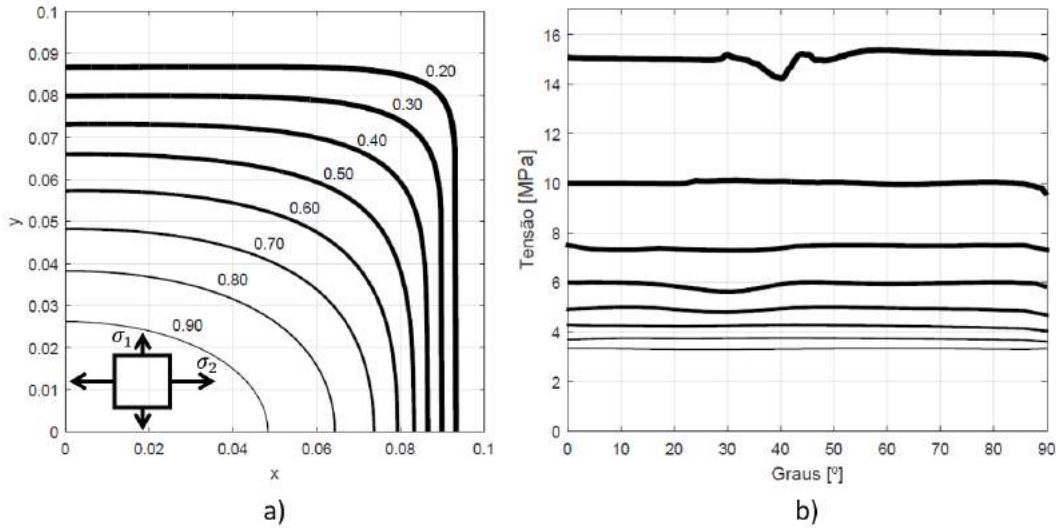


Figura 5.11: Solução do problema da minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão ($\sigma_2 = 2\sigma_1$) para inclusões descritas pela **k-type Gielis Formula**, com $k = 2$. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.

Novamente, pela análise da tabela 5.8 e posterior comparação com a tabela 5.4 conclui-se que a introdução dos constrangimentos de tensão no problema da minimização da *compliance* melhoram muito a qualidade dos resultados. A tabela 5.8 mostra uma redução de pelo menos metade do parâmetro *RE* para todas as frações volúmicas de material. A figura 5.11 mostra que as soluções obtidas para este problema apresentam uma aproximação muito boa do *Equi-Stress Principle* para todas as frações volúmicas de material à exceção da célula de base com a inclusão maior, cujo o valor do *RE* é 3.94%.

5.1.3 Minimização do máximo da tensão

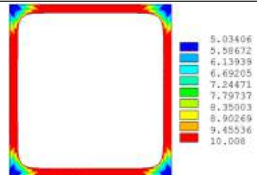
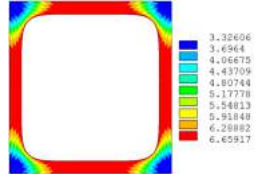
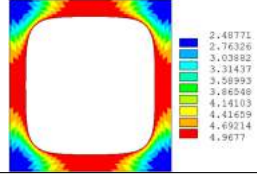
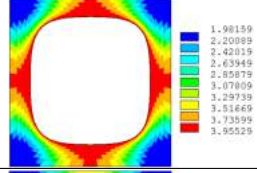
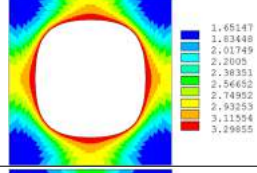
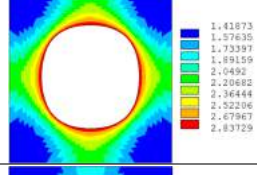
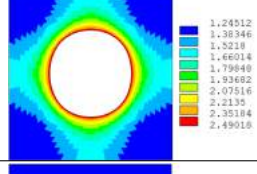
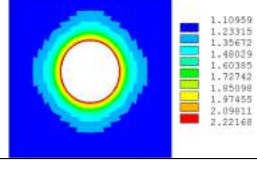
5.1.3.1 Carregamento biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2$)

Nas tabelas 5.9 e 5.10, apresentam-se as distribuições da tensão de von-Mises nas microestruturas ótimas, obtidas considerando um carregamento biaxial onde o rácio das tensões macroscópicas é unitário. É apresentado para cada fração volúmica de material, o valor da densidade de energia de deformação da célula de base central u , o valor máximo teórico da tensão de von-Mises σ_{max}^{teo} e o valor máximo da tensão de von-Mises obtido através da análise de elementos finitos σ_{max}^{ANSYS} . Também se calcula o parâmetro *RE* e a percentagem do desvio entre σ_{max}^{teo} e σ_{max}^{ANSYS} para quantificar a qualidade dos resultados.

Tabela 5.9: Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da **superellipse** para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	8.64709	10.0	10.0	0.0	0.92	
30	5.3160	6.666	6.686	0.30	1.69	
40	3.64339	5.0	5.034	0.68	2.73	
50	2.26462	4.0	4.053	1.32	4.48	
60	1.99185	3.333	3.396	1.89	6.42	
70	1.53211	2.857	2.905	1.68	4.71	
80	1.18903	2.50	2.520	0.80	2.42	
90	0.91950	2.222	2.221	0.04	0.70	

Tabela 5.10: Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da **superformula** para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	8.67488	10.0	9.980	0.20	0.31	
30	5.32377	6.666	6.659	0.10	0.89	
40	3.64024	5.0	4.967	0.66	1.25	
50	2.64183	4.0	3.955	1.12	0.35	
60	1.98970	3.333	3.298	1.05	0.29	
70	1.53171	2.857	2.843	0.49	0.66	
80	1.18892	2.50	2.490	0.40	0.51	
90	0.91949	2.222	2.221	0.45	0.60	

As figuras 5.12 e 5.13 mostram para 1/4 da célula de base a evolução das formas ótimas das inclusões, para diferentes frações volúmicas de material. Estas figuras também apresentam o valor da tensão circunferencial nos elementos adjacentes às inclusões, em função de uma variável angular. Na figura 5.12 utiliza-se a equação da superelipse para descrever as formas das inclusões, enquanto que a figura 5.13 utiliza a equação da superformula. Os valores dos parâmetros ótimos das equações da superelipse e da superformula podem ser consultados nas tabelas B.2 a) e B.6, respectivamente.

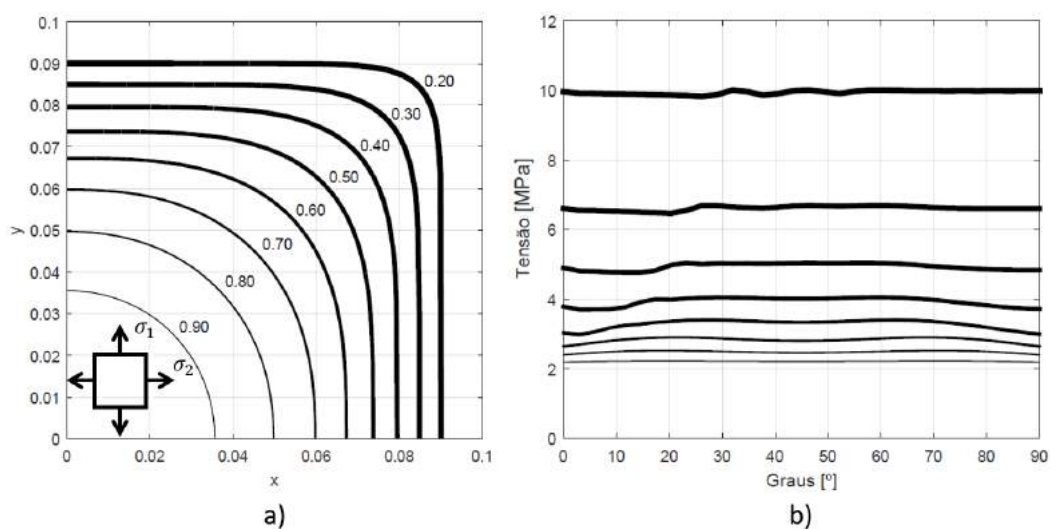


Figura 5.12: Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da **superelipse**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.

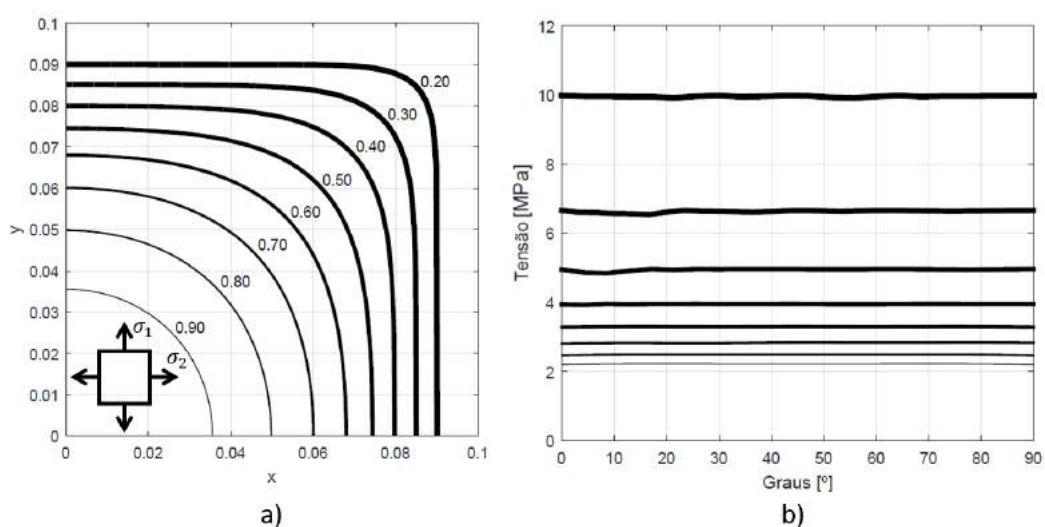


Figura 5.13: Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$) para inclusões descritas pela equação da **superformula**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.

Analisado primeiramente os resultados da tabela 5.9 e da figura 5.12 conclui-se que a utilização da equação da superelipse para descrever as inclusões, só permite obter resultados que satisfaçam o *Equi-Stress Principle* para frações volúmicas de material reduzidas ou elevadas. Ao contrário do que acontece quando se utiliza a parametrização da superformula que permite obter excelentes resultados para todo o espectro de frações volúmicas. Comparando a qualidade dos resultados das duas parametrizações através da observação do parâmetro RE , verifica-se que a parametrização da superformula apresente uma qualidade de resultados muito superior, sendo 1.25% o valor máximo do parâmetro RE . Estes resultados também mostram a vantagem de formular os problemas de otimização como a minimização do máximo da tensão. A figura 5.14 mostra a sobreposição do contorno das inclusões, definidos pelas equações da superelipse e da superformula.

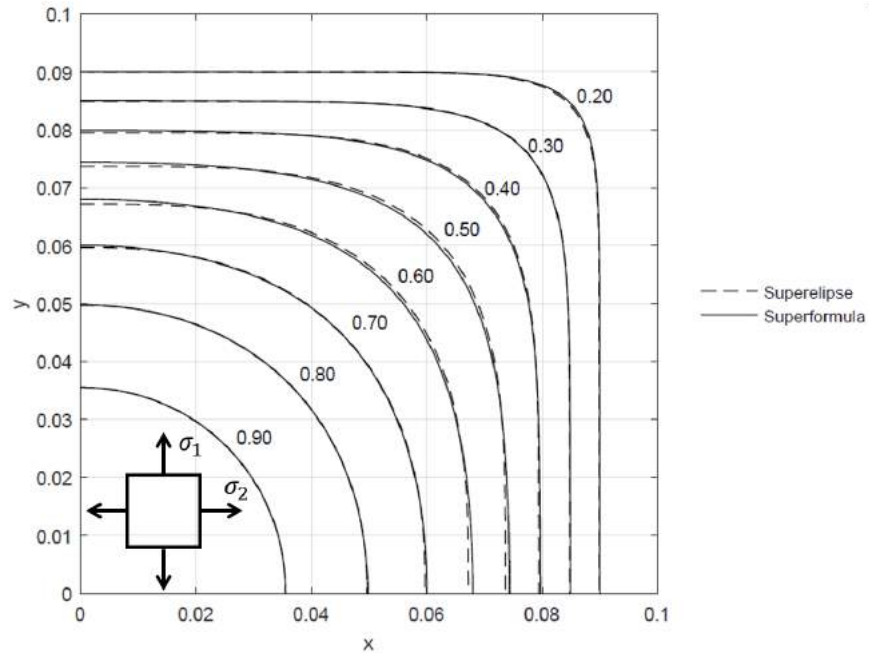


Figura 5.14: Sobreposição das formas ótimas obtidas através da equação da **superelipse** e da **superformula** para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$).

5.1.3.2 Carregamento biaxial ($\sigma_1 = 2\sigma_2$)

Nas tabela 5.11 e 5.12, apresentam-se as distribuições da tensão de von-Mises nas microestruturas ótimas obtidas resolvendo o problema da minimização do máximo da tensão, considerando um carregamento biaxial onde o rácio das tensões macroscópicas é não unitário. Nestas tabelas é também apresentado para cada fração volúmica de material, o valor da densidade de energia de deformação da célula de base central u , o valor máximo teórico da tensão de von-Mises σ_{max}^{teo} e o valor máximo da tensão de von-Mises obtido através da análise de elementos finitos σ_{max}^{ANSYS} . De modo a quantificar a qualidade dos resultados é calculado o valor do parâmetro RE e a percentagem do desvio entre σ_{max}^{teo} e σ_{max}^{ANSYS} .

Tabela 5.11: Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da equação da **superelipse** para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	20.1307	15.0	15.74	4.93	11.27	
30	12.4025	10.0	10.52	5.20	6.78	
40	8.51232	7.50	7.826	4.34	6.50	
50	6.23124	6.0	6.197	3.28	6.05	
60	4.76357	5.0	5.117	2.34	6.31	
70	3.75068	4.285	4.359	1.72	6.32	
80	2.99428	3.750	3.783	0.88	4.01	
90	2.39334	3.333	3.335	0.06	1.19	

Tabela 5.12: Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) e representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] nas microestruturas ótimas para várias frações volúmicas de material. Utilização da **k-type Gielis Formula**, com $k = 2$, para definir a forma das inclusões.

V [%]	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{ANSYS}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
20	20.1137	15.0	15.21	1.40	3.47	
30	12.4157	10.0	10.17	1.70	1.64	
40	8.50853	7.50	7.452	0.64	1.0	
50	6.22533	6.0	5.911	1.48	0.55	
60	4.76065	5.0	4.931	1.38	1.29	
70	3.74929	4.285	4.285	1.14	0.26	
80	2.99379	3.750	3.724	0.69	0.18	
90	2.41590	3.333	3.352	0.57	0.45	

As figuras 5.15 e 5.16 mostram para 1/4 da célula de base a evolução das formas ótimas das inclusões, para diferentes frações volúmicas de material. Estas figuras também apresentam o valor da tensão circunferencial nos elementos adjacentes às inclusões, em função de uma variável angular. Na figura 5.15 utiliza-se a equação da superelipse para descrever a forma das inclusões, enquanto que na figura 5.16 é utilizada a k-type Gielis Formula. Os valores dos parâmetros ótimos das equações da superelipse e da k-type Gielis Formula podem ser consultados nas tabelas B.2 b) e B.11, respetivamente.

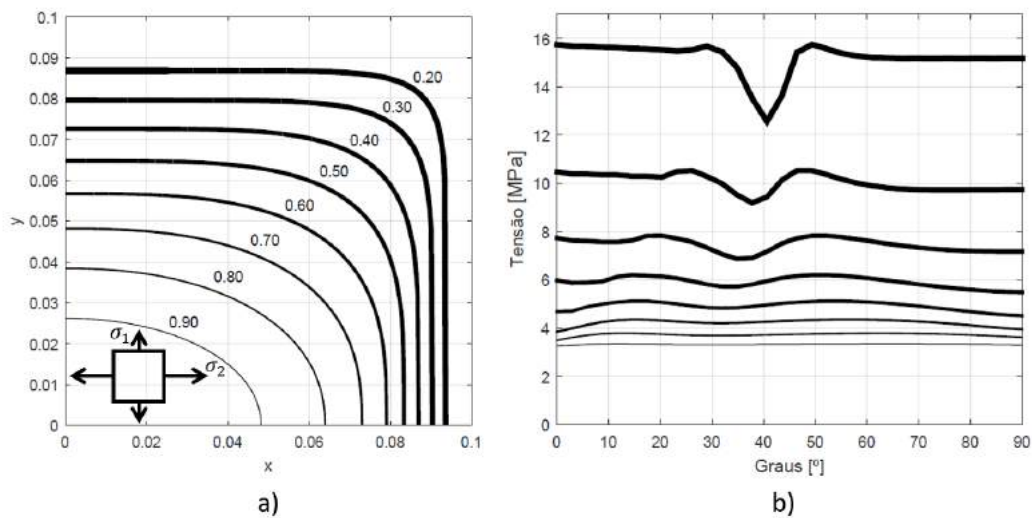


Figura 5.15: Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_2 = 2\sigma_1$) para inclusões descritas pela equação da **superelipse**. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.

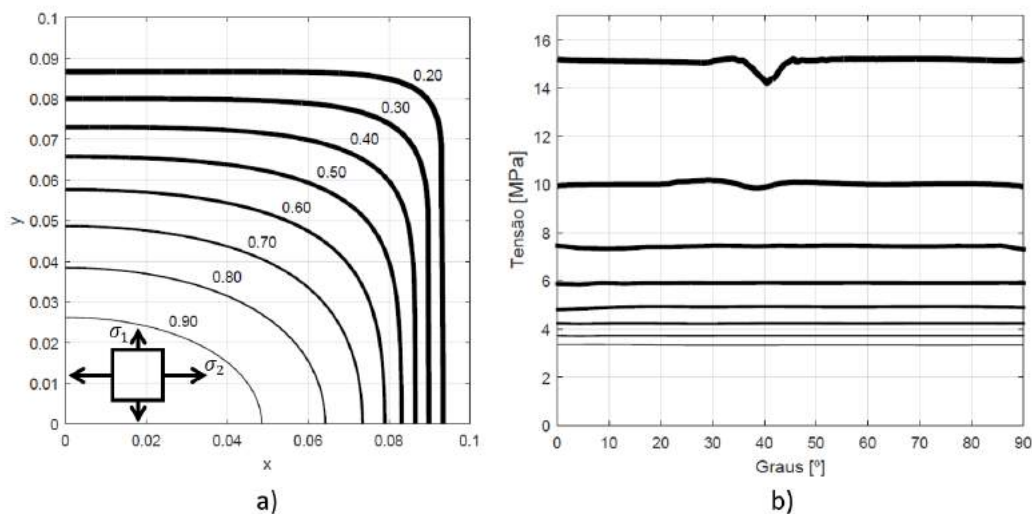


Figura 5.16: Solução do problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_2 = 2\sigma_1$) para inclusões descritas pela **k-type Gielis Formula**, com $k = 2$. a) Formas ótimas para diferentes frações volúmicas de material. b) Tensão de von-Mises nos elementos adjacentes às inclusões.

Mais uma vez pela análise dos resultados apresentados nas tabelas 5.11 e 5.12 e das figuras 5.15 e 5.16 verifica-se que a utilização da k-type Gielis Formula para descrever a forma das inclusões permite obter resultados com uma qualidade superior, em relação aos resultados obtidos com a parametrização da superelipse. A tabela 5.11 e figura 5.15 mostram que o *Equi-Stress Principle* só é satisfeito para uma fração volúmica de material igual 0.90 sendo que para as outras frações volúmicas o valor do parâmetro RE varia entre 4% e 11%. Por outro lado, a tabela 5.12 e a figura 5.16 mostram que o *Equi-Stress Principle* é sempre satisfeito apresentado valores do parâmetro RE na ordem dos 1%, à exceção da célula de base com a fração volúmica de material mais reduzida. A figura 5.17 mostra a sobreposição do contorno das inclusões, definidos pelas equações da superelipse e da superformula.

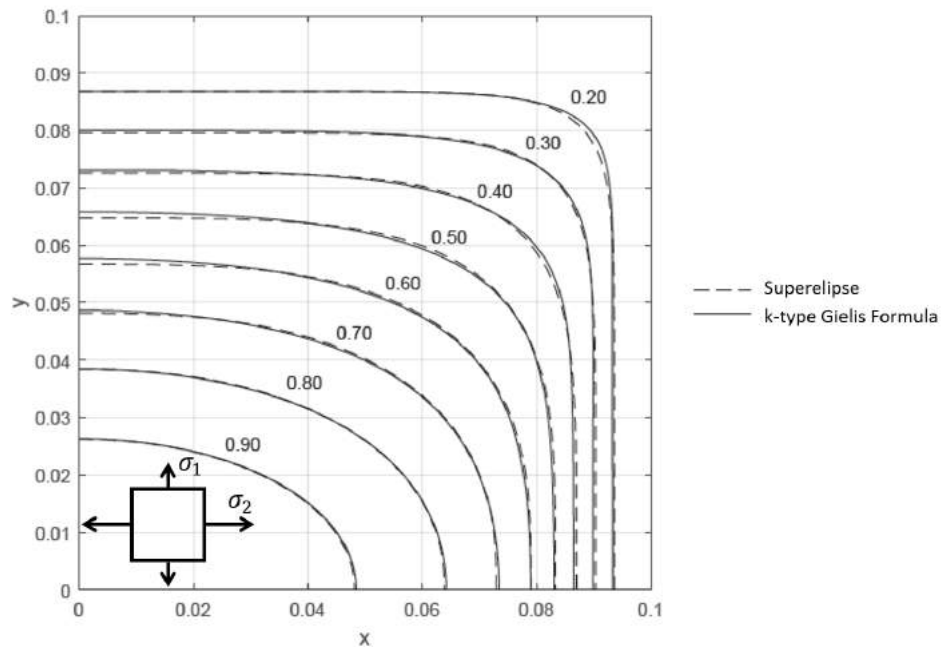


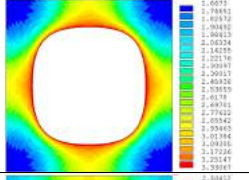
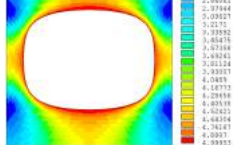
Figura 5.17: Sobreposição das formas ótimas obtidas através da equação da **superelipse** e da **k-type Gielis Formula**, com $k = 2$ para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).

5.2 Formas ótimas obtidas pela teoria da homogeneização

Os resultados obtidos na secção anterior são obtidos através de análises de elementos finitos a todo o domínio do material celular de microestrutura periódica, o que não acontece nesta secção em que é aplicada a teoria da homogeneização para obter as formas ótimas das inclusões, sendo apenas analisada a célula de base central do domínio do material celular. Na aplicação da teoria da homogeneização resolve-se apenas o problema da minimização do máximo da tensão, pois através dos resultados apresentados secção anterior conclui-se que esta era a melhor maneira de formular o problema de otimização.

Na tabela 5.13 é apresentada a solução do problema da minimização do máximo da tensão e a respetiva distribuição de tensão de von-Mises para dois carregamentos diferentes. É também apresentado o valor da densidade de energia de deformação da célula de base central u , o valor máximo teórico da tensão de von-Mises σ_{max}^{teo} e o valor máximo da tensão de von-Mises obtido através da aplicação da teoria da homogeneização σ_{max}^{HOMO} . Finalmente também se calcula o valor do parâmetro RE e a percentagem do desvio entre σ_{max}^{teo} e σ_{max}^{HOMO} . Para o problema em que se considera o rácio das tensões macroscópicas unitário é utilizada a equação da superformula para definir a curva da inclusão, enquanto que, para o rácio de tensões macroscópicas não unitário é utilizada a k-type Gielis Formula, com $k = 2$.

Tabela 5.13: Solução do problema da minimização do máximo da tensão aplicando a teoria da homogeneização e representação da respetiva distribuição da tensão de von-Mises [MPa] considerando uma fração volúmica de material de 60%.

σ_1/σ_2	u [J/m ³]	σ_{max}^{teo}	σ_{max}^{HOMO}	Desvio [%]	RE [%]	Campo de Tensões
1	2.03136	3.333	3.330	0.09	0.73	
2	4.89510	5.0	4.999	0.02	0.98	

Em relação aos resultados obtidos através da teoria da homogeneização não é feito um estudo tão exaustivo como o da secção anterior, interessando apenas perceber a proximidade dos resultados obtidos pelas duas metodologias. Através da análise da tabela 5.13 verifica-se que as duas microestruturas obtidas apresentam uma solução muito próxima do *Equi-Stress Principle*, sendo o valor do parâmetro RE inferior a 1% para os dois casos considerados. Comparado as microestruturas da tabela 5.13 com as microestruturas das tabelas 5.10 e 5.12 para uma fração volúmica de material igual a 60% conclui-se que as duas metodologias apresentam resultados coerentes.

Os resultados da tabela 5.13 também mostram que a análise do compósito real composto por uma padrão periódico de 5x5 células pode ser substituída pela análise de uma única célula com condições de fronteira de periodicidade aplicando a teoria da homogeneização. Os resultados obtidos aqui pela homogeneização (PREMAT 3D, [21]) tem por base um modelo de elementos finitos com hexaedros de oito nós e um elemento apenas na direcção da espessura. Como trabalho futuro será interessante a otimização de forma utilizando a homogeneização com um modelo 2D que de forma mais eficiente permita chegar a estes mesmos resultados.

5.3 Comparação e discussão dos resultados

O primeiro problema clássico que se resolveu na presente dissertação, foi a minimização da *compliance* considerando vários constrangimentos de volume e três carregamentos distintos. As formas ótimas das inclusões obtidas através da resolução deste problema apresentam distribuições de tensão de von-Mises que se afastam da condição de otimalidade. Neste problema, considera-se que a função objetivo é dada pela densidade da energia de deformação, que é uma função bastante insensível a variações da geometria da inclusão, o que leva a que o algoritmo de otimização tenha bastante dificuldade em calcular derivadas e consequentemente encontrar uma direção de procura. Outro problema associado à resolução deste problema de otimização, é a tendência que o algoritmo tem para deformar a malha de elementos finitos de modo a para minimizar o valor da função objetivo, através de aproximações por defeito.

Pela análise dos resultados do problema da minimização da *compliance* verifica-se que o valor da tensão máxima de von-Mises obtido através do programa de elementos finitos ANSYS, é quase sempre superior ao valor teórico da tensão máxima de von-Mises. Isto levou à formulação de um novo problema de otimização que resulta da introdução de constrangimentos de tensão no problema da minimização da *compliance*. Para este problema foi apenas utilizada a equação da superformula e a k-type Gielis Formula, com $k = 2$ por serem equações que permitem uma maior flexibilidade na descrição geométrica da fronteira. Os resultados obtidos para este problema apresentam uma qualidade de resultados bastante superior aos resultados do problema da minimização da *compliance*, sendo que a aproximação ao *Equi-Stress Principle* é muito elevada.

Por último, pelo facto de em muitas aplicações da engenharia o objetivo ser minimizar o pico da concentração de tensões e não a densidade da energia de deformação, formulou-se um terceiro problema de otimização que consiste na minimização do máximo da tensão com constrangimentos de tensão. Através dos resultados obtidos nas secções anteriores conclui-se que esta é melhor maneira de formular o problema de otimização, pois as soluções deste problema apresentam uma qualidade de resultados excelente em que o *Equi-Stress Principle* é sempre satisfeito. Esta formulação é bastante vantajosa, uma vez que a função da tensão é bastante sensível a variações geométricas da forma das inclusões.

Na presente dissertação de modo a resolver os problemas de otimização de forma utilizam-se três parametrizações diferentes para descrever a forma das inclusões. Inicialmente começou-se por utilizar a equação da superelipse para resolver os problemas da minimização da *compliance* e da minimização do máximo da tensão, no entanto, o facto da forma das inclusões modeladas por esta equação serem controladas apenas por um parâmetro (η), faz com que a descrição geométrica da fronteira seja bastante rígida. Por este motivo, os resultados obtidos através da equação da superelipse não são tão satisfatórios como os resultados obtidos para as outras parametrizações mais flexíveis. As inclusões

ótimas obtidas com esta parametrização e para um rácio de tensões macroscópicas unitário apresentam boas aproximações ao *Equi-Stress Principle* para frações volúmicas de material reduzidas e elevadas. Quando o rácio das tensões macroscópicas é não unitário esta aproximação só é boa para frações volúmicas de material elevadas.

Posteriormente para obter uma descrição geométrica da fronteira das inclusões mais flexível utilizou-se a equação da superformula para resolver todos os problemas de otimização onde se consideram carregamentos em que o rácio das tensões macroscópicas é unitário. Esta equação corresponde a uma generalização da equação da superelipse e gera geometrias cuja curvatura da forma é controlada através de três parâmetros (n_1 , n_2 e n_3) o que permite uma flexibilidade na descrição geométrica das formas muito maior que a equação da superelipse. Os resultados obtidos utilizando esta parametrização para os problemas da minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão e da minimização do máximo da tensão apresentam uma aproximação muito grande ao *Equi-Stress Principle*, sendo o valor máximo do parâmetro *RE* igual a 1.85%.

Para resolver os problemas de otimização nos casos em que o rácio das tensões macroscópicas é não unitário, utilizou-se a *k*-type Gielis Formula, com $k = 2$. Para este tipo de carregamentos as geometrias das células de base obtidas não são simétricas em relação à reta $y = x$, logo para que fosse possível obter as formas ótimas das inclusões foi necessário utilizar uma parametrização mais flexível. Deste modo, considerou-se uma equação composta pela soma de duas superformulas de parâmetros distintos para definir a forma das inclusões. Utilizando esta parametrização para resolver os problemas da minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão e da minimização do máximo da tensão, obtêm-se formas ótimas que satisfazem o *Equi-Stress Principle*, sendo que os valores para o parâmetro *RE* são sempre inferiores a 4% o que mostra que a discrepância entre o valor máximo e mínimo da tensão de von-Mises ao longo da fronteira das inclusões é bastante baixa.

Neste capítulo o caso do corte foi resolvido apenas para o problema da minimização da *compliance*. Segundo Coelho, Guedes e Cardoso [11] os problemas da minimização da *compliance* e da minimização do máximo da tensão não apresentam a mesma solução. No trabalho publicado por estes autores demonstra-se que as microestruturas ótimas são obtidas através da redução do tamanho da inclusão central e da remoção de material nas zonas onde o nível de tensão é mais baixo. No anexo C desta dissertação mostra-se um breve estudo exploratório onde se mostra que a solução destes dois problemas não é a mesma.

Capítulo 6

Conclusões e desenvolvimentos futuros

O principal objetivo da presente dissertação é a otimização de forma de inclusões em materiais celulares de microestrutura periódica, de modo a que estas verifiquem uma determinada condição de otimalidade que pode ser definida pelo *Equi-Stress Principle* ou pelo *M-Equi-Stress Principle*, consoante for aplicado o carregamento biaxial ou de corte, respetivamente.

Para resolver o problema de otimização de forma foram consideradas três formulações distintas: a minimização da *compliance*, a minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão e a minimização do máximo da tensão com constrangimentos de tensão. Inicialmente para obter as formas ótimas das inclusões utilizou-se a equação da superelipse para descrever a fronteira destas. No entanto, devido aos constrangimentos geométricos desta parametrização foram obtidas inclusões que se afastavam das condições de otimalidade. Na tentativa de resolver este problema e obter uma qualidade de resultados superior, utilizou-se a equação da superformula, que consiste numa generalização da equação da superelipse, para definir as formas das inclusões. Posteriormente, quando se considerou um carregamento constituído por um rácio de tensões macroscópicas não unitário, percebeu-se a utilização da superformula para descrever a forma das inclusões também não era suficiente para satisfazer as condições de otimalidade, o que levou a que fosse utilizada a k-type Gielis Formula para obter uma parametrização mais flexível na descrição geométrica da fronteira.

A presente dissertação mostra que a melhor maneira de formular o problema de otimização de forma para determinar as formas ótimas das inclusões é através da minimização do máximo da tensão. Pois esta formulação utiliza uma função objetivo que é bastante sensível a variações da geometria da forma da inclusão. Além disso conclui-se que a utilização da equação da superformula permite obter resultados com excelente qualidade, para o caso em que se considera um rácio de tensões macroscópicas unitário, em que o valor do parâmetro *RE* é sempre inferior a 1.85%. Por outro lado para o caso em que se

considera um rácio de tensões macroscópicas não unitário, constata-se que para obter formas ótimas de inclusões que satisfaçam o *Equi-Stress Principle* é necessário utilizar a k-type Gielis Formula, sendo que para este caso o valor máximo do parâmetro RE é igual a 3.47%.

Na presente dissertação, considera-se que a célula de base dos materiais celulares de microestrutura periódica é constituído por uma matriz de material isotrópico e homogéneo, que contém uma inclusão de vazio embebida nesta. Para este modelo da célula de base, as variáveis de projeto do problema de otimização são apenas os parâmetros da equação analítica, que descreve a forma das inclusões. Neste trabalho foram determinadas as microestruturas ótimas que minimizam o máximo da tensão para este modelo da célula de base, no entanto, não existe nenhuma garantia de que alterando o modelo da célula de base se possam obter microestruturas mais ótimas. Assim um dos desenvolvimentos futuros que surge do trabalho realizado nesta dissertação, é a introdução de uma coroa de material em torno da inclusão, com um módulo de elasticidade diferente do material da matriz. A figura 6.1 mostra a introdução da coroa de material na célula de base.

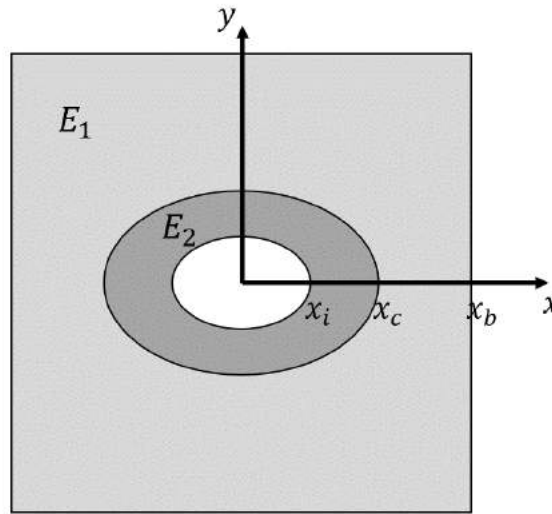


Figura 6.1: Esquema da célula de base constituída por dois materiais isotrópicos e homogêneos distintos (E_1 e E_2).

Considerando a célula de base representada na figura 6.1 surgem novas variáveis de projeto para além dos parâmetros que controlam a forma da inclusão. Para este novo problema de otimização também se considera como variáveis de projeto os parâmetros que controlam a forma da coroa, o rácio dos módulos de elasticidade (E_1/E_2) e o parâmetro δ que controla o tamanho da coroa e é definido pela seguinte equação:

$$\delta = \frac{x_c}{x_b - x_i} \quad (6.1)$$

De modo a verificar se de facto seria possível obter microestruturas mais ótimas, ou seja, microestruturas que conseguissem reduzir mais o valor do máximo da tensão de

von-Mises, foi considerada uma célula de base em que a forma da inclusão é igual à forma obtida para o problema do minimização do máximo da tensão, considerando uma fração volúmica de material de 80% e um rácio de tensões macroscópicas unitário. Em seguida foram feitas várias análises de elementos finitos considerando diferentes valores para o módulo de elasticidade do material da coroa e para o parâmetro δ . Na figura 6.2 é representado o valor máximo da tensão de von-Mises em função do módulo de elasticidade do material da coroa e do parâmetro δ . Sobre a superfície obtida é também representada uma linha que mostra o caso em que o rácio dos módulos de elasticidade é unitário, ou seja a região de projeto onde se focou o estudo da presente dissertação.

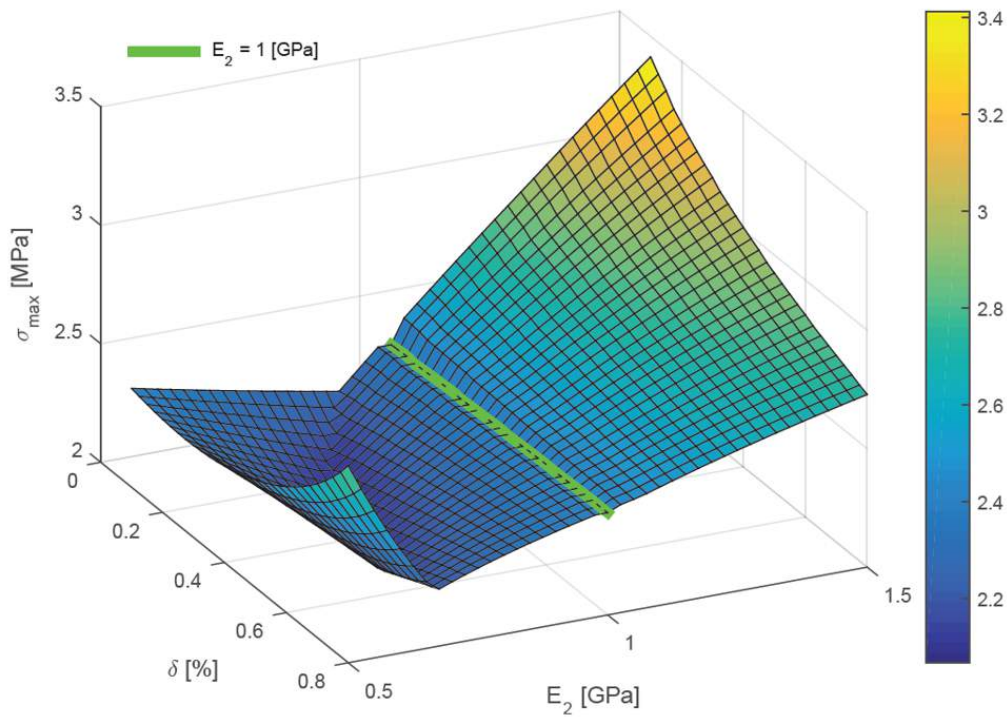


Figura 6.2: Representação da tensão máxima de von-Mises em função do módulo de elasticidade do material da coroa E_2 e do parâmetro δ .

Durante o trabalho realizado nesta dissertação, a procura das microestruturas ótimas esteve sempre restringido à região da superfície onde o rácio dos módulos de elasticidade é unitário. No entanto, através da figura anterior conclui-se que através da alteração do módulo de elasticidade do material da coroa e do parâmetro δ existe uma região de projeto muito mais alargada que permite encontrar soluções que minimizem mais o máximo da tensão de von-Mises. Na figura anterior considera-se que os parâmetros que controlam a forma da inclusão são iguais aos parâmetros que controlam a forma da coroa, no entanto, nada garante que estes sejam os valores ótimos dos parâmetros que controlam as duas fronteiras.

No presente trabalho é considerada como fronteira de projeto a curva da inclusão da célula de base central e assume-se que a forma ótima da inclusão é igual para todas as

células de base do material celular. No entanto, estas inclusões só verificam as condições de otimalidade para as células de base que não estão na fronteira do domínio da estrutura. A figura 6.3 mostra a distribuição de tensões de von-Mises em várias células de base pertencentes ao domínio do material celular. Nesta figura o carregamento aplicado à estrutura é constituído por um rácio de tensões macroscópicas igual a dois.

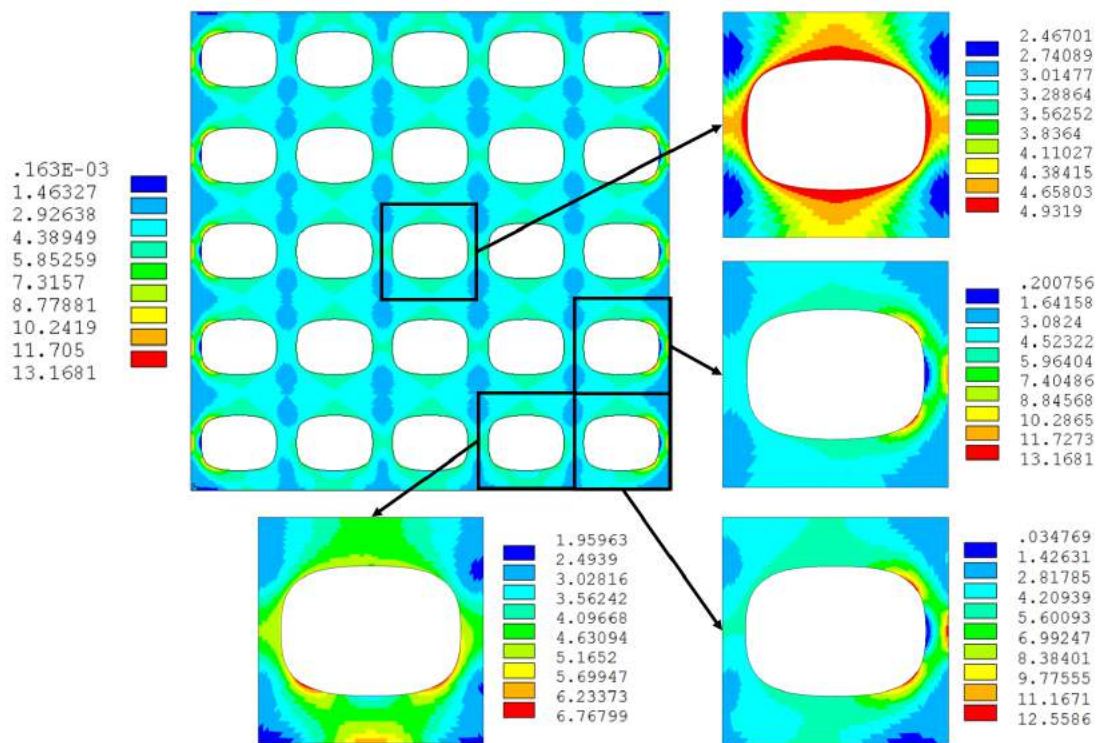


Figura 6.3: Representação da distribuição da tensão de von-Mises [MPa] para todo o domínio do material celular e para diferentes células de base pertencentes a este.

Pela observação da figura anterior, conclui-se que algumas células de base da fronteira apresentam valores máximos da tensão de von-Mises superiores ao dobro do valor máximo da tensão de von-Mises da célula central. Isto mostra que de nada vale minimizar o valor máximo da tensão nas células de base centrais, se nas células de base da fronteira o pico da concentração de tensões continua elevado. Deste modo outro desenvolvimento futuro com bastante relevância é otimização da microestrutura dos materiais celular considerando parametrizações distintas para modelar as inclusões das células de base centrais e das células de base da fronteira.

Finalmente como desenvolvimento futuro desta dissertação, também seria interessante utilizar a parametrização da intersecção de duas k-type Gielis Formulas, para determinar a forma ótima de inclusões, para problemas onde se considera um carregamento aplicado ao domínio do material celular constituído por um rácio de tensões macroscópicas não unitário e negativo.

Referências bibliográficas

- [1] D. Amiano. “Análise e otimização de materiais compósitos de microestrutura periódica”. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, 2015.
- [2] N. Banichuk. *Problems and Methods of Optimal Structural Design*. Washington, D.C.: Scripta Book/McGraw-Hill, 1983. ISBN: 1-56032-712-x.
- [3] M. P. Bendsøe e O. Sigmund. *Topology optimisation theory, methods and applications*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2003. ISBN: 978-3-642-07698-5.
- [4] M. Bendsøe. “Optimal shape design as material distribution problem”. Em: *Struct. Optim.* 1 (1989), pp. 193–202.
- [5] M. Bendsøe e N. Kikuchi. “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71 (1988), pp. 197–224.
- [6] P. Chadwick, M. Vianello e S. Cowin. “A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight”. Em: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49 (2001), pp. 2471–2492.
- [7] G. P. Cherepanov. “Inverse problems of the plane theory of elasticity”. Em: *J. Appl. Math. Mech.* 38 (1973), pp. 963–979.
- [8] P. G. Coelho. “Modelos Hierárquicos para a análise e síntese de estruturas e materiais com aplicações à remodelação óssea”. Tese de Doutoramento. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [9] P. G. Coelho. *A few notes for T.A.M.E. classes*. Apontamentos da disciplina de Tópicos Avançados em Mecânica Estrutural, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa. 2017.
- [10] P. G. Coelho, D. B. Palma, D. M. Negrão, J. M. Guedes, H. c. Rodrigues e J. B. Cardoso. *Shape and topology optimization of inclusions in periodic material microstructures with control over the micro-stress distribution*. The Thirteenth International Conference - Computational Structures Technology. Sitges, Barcelona, Spain. 2018.
- [11] P. G. Coelho, J. M. Guedes e J. B. Cardoso. “Topology optimization of cellular materials with periodic microstructure under stress constraints”. Em: *Struct. Multidiscip. Optim.* (2018), pp. 1–13.

- [12] F. Conde. “Análise e otimização de materiais compósitos de matriz polimérica não convencional em tração uniaxial”. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [13] K. E. Evans e A. Alderson. “Auxetic Materials: Functional Materials and Structures from Lateral Thinking!” Em: *Advanced Materials* 12 (2000), pp. 617–628.
- [14] R. Fletcher. “A new approach to variable metric algorithms”. Em: *Computer Journal* 13 (1970), pp. 317–322.
- [15] R. Fontes. “Fabrico e Caracterização de Scaffolds à Base de Fosfato de Cálcio”. Tese de Mestrado. Instituto Superior Técnico, 2010.
- [16] J. Gielis. “A generic geometric transformation that unifies a wide a range of natural and abstract shapes”. Em: *American Journal of Botany* 90(3) (2003), pp. 333–338.
- [17] J. Gielis. *Inventing the Circle: the geometry of nature*. Geniaal bvba, 2003.
- [18] J. Gielis. *The Geometrical Beauty of Plants*. Atlantis Press, 2017. ISBN: 978-94-6239-150-5.
- [19] F. Gommer, L. P. Brown e K. C. A. Wedgwood. “Analytical method using gamma functions for determining areas of power elliptical shapes for use in geometrical textile models”. Em: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 81 (2016), pp. 222–224.
- [20] Y. Grabovsky e R. Kohn. “Microstructures minimizing the energy of a two phase elastic composite in the space dimensions. II: the Vigdergauz microstructure”. Em: *J. Mech. Phys. Solids* 43(6) (1995), pp. 949–972.
- [21] J. Guedes e N. Kikuchi. “Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenisation method with adaptive finite element methods”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 83 (1990), pp. 143–198.
- [22] R. T. Haftka e R. V. Grandhi. “Structural shape optimization - A survey”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 57(1) (1986), pp. 91–106.
- [23] Y. L. Hsu. “A review of structural shape optimization”. Em: *American Journal of Botany* 26 (1994), pp. 3–13.
- [24] R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Plenum Press, 1975.
- [25] L. Noël e P. Duysinx. “Shape optimization of microstructural designs subject to local stress constraints within an XFEM-level set framework”. Em: *Struct. Multidiscip. Optim.* 55(6) (2017), pp. 2323–2338.
- [26] J. Norato. “Topology optimization with supershapes”. Em: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 58 (2018), pp. 415–434.
- [27] P. Pederson. “On optimal shapes in materials and structures”. Em: *Struct. Multidiscip. Optim.* 19 (2000), pp. 169–182.
- [28] H. Pina. *Métodos Numéricos*. Escolar Editora, 2010. ISBN: 978-972-592-284-2.

- [29] R. Preto. “Estudo experimental do comportamento mecânico de compósitos em fibras de basalto”. Tese de Mestrado. Instituto Superior Técnico, 2013.
- [30] G. Rozvany, M. Zhou e T. Bicker. “Generalized shape optimisation without homogenisation”. Em: *Struct. Optim.* 4 (1992), pp. 250–254.
- [31] S. Vigdergauz. “Two-Dimensional Grained Composites of Extreme Rigidity”. Em: *J. Appl. Mech., Trans. ASME* 61 (1994), pp. 390–394.
- [32] S. Vigdergauz. “Genetic algorithm perspective to identify energy optimizing inclusions in a elastic plate”. Em: *Int. J. Solids Struct.* 38 (2001), pp. 6851–6867.
- [33] S. Vigdergauz. “The effective properties of a perforated elastic plate numerical optimization by genetic algorithm”. Em: *Int. J. Solids Struct.* 38 (2001), pp. 8593–8616.
- [34] S. Vigdergauz e A. Cherkaev. “A hole in a plate, optimal for its biaxial extension-compression”. Em: *J. Appl. Math. Mech.* 50 (1987), pp. 401–404.
- [35] J. Wieding, R. Souffrant, W. Mittelmeier e R. Bader. “Finite element analyses on the biomechanical stability of open porous titanium scaffolds for large segmental bone defects under physiological load conditions”. Em: *Medical Engineering and Physics* 35 (2013), pp. 422–432.
- [36] J. Wieding, A. Wolf e R. Bader. “Numerical optimization of open-porous bone scaffolds structures to match the elastic properties of human cortical bone”. Em: *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 37 (2014), pp. 56–68.
- [37] S. Wu, X. Liu, K. W. K. Yeung, C. Liu e X. Yang. “Biomimetics porous scaffolds for bone tissue engineering”. Em: *Materials Science and Engineering R* 80 (2014), pp. 1–36.
- [38] Z. Wu. “An efficient approach for shape optimization of components”. Em: *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005), pp. 1595–1610.
- [39] Z. Wu. “Optimal hole shape for minimum stress concentration using parameterized geometry models”. Em: *Struct. Multidiscip. Optim.* 37 (2009), pp. 625–634.

Anexo A

Classes de simetria

- **Simetria triclínica**

Esta classe de simetria representa o nível de anisotropia máximo, em que não existe nenhum plano de simetria elástica, ou seja em cada ponto do domínio do material, as propriedades elásticas variam para qualquer que seja a direção considerada. O comportamento deste tipo de materiais implica que a aplicação de uma tensão normal, numa das faces de um cubo infinitesimal, dê origem a extensões combinadas com distorções, pois existe um acoplamento entre as duas. O número de constantes elásticas necessárias para descrever as relações entre o campo das tensões e o campo das deformações são 21. Utilizando a notação de Voigt-Kelvin, o tensor de rigidez é definido do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{14} & E_{24} & E_{34} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{15} & E_{25} & E_{35} & E_{45} & E_{55} & E_{56} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{46} & E_{56} & E_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

- **Simetria monoclínica**

Um material que contenha apenas um plano de simetria elástica, é designado por monoclínico. Para caracterizar o comportamento deste tipo de materiais é necessário conhecer 13 coeficientes elásticos independentes. Neste caso o tensor de rigidez pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & E_{26} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 0 & 0 & E_{36} \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & E_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{45} & E_{55} & 0 \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

- **Simetria ortotrópica**

Se o material apresentar três planos de simetria elástica, mutuamente ortogonais entre si, diz-se ortotrópico. Para esta classe de simetria os tensores elásticos ficam reduzidos a 9 constantes elásticas independentes. Neste caso o tensor de rigidez é definido do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

- **Simetria trigonal**

Tal como na classe de simetria ortotrópica, os materiais com simetria trigonal também possuem três planos de simetria elástica, no entanto estes não são mutuamente ortogonais entre si. O tensor de rigidez, que descreve os materiais que pertencem a esta classe de simetria, é definido através de 6 coeficientes elásticos independentes e toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{13} & -E_{14} & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{13} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ E_{14} & -E_{14} & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & E_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{14} & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

- **Simetria tetragonal**

O comportamento dos materiais, pertencentes a esta classe de simetria, é descrito através de tensores elásticos que são definidos por 6 coeficientes elásticos independentes, no entanto o número de planos de simetria elástica são cinco. O tensor de rigidez é definido do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{13} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

- **Simetria transversalmente isotrópica**

Para esta classe de simetria, o material contém um plano interior, no qual todas as propriedades elásticas são iguais independentemente das direções consideradas, contidas nesse plano (plano de isotropia). Na direção perpendicular, em relação ao plano de isotropia, as propriedades elásticas diferem. Neste caso, o tensor de rigidez é descrito por 5 coeficientes elástico independentes, como se mostra em seguida:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{13} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

- **Simetria cúbica**

Os materiais pertencentes à classe de simetria cúbica, apresentam nove planos de simetria elástica e os tensores de elasticidade são descritos por apenas 3 constantes elásticas independentes. Nesta classe, o tensor de rigidez é definido por:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{12} & E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

- **Simetria isotrópica**

Os materiais com simetria isotrópica, são caracterizados por terem infinitos planos de simetria elástica, ou seja num determinado ponto pertencente ao domínio material, as propriedades elásticas são iguais, para qualquer que seja a direção considerada. Neste tipo de materiais, o tensor de rigidez é caracterizado apenas por 2 coeficientes elásticos independentes, como se mostra em seguida:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{12} & E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Anexo B

Resultados do capítulo 5

B.1 Parâmetros da equação da superelipse

Tabela B.1: Parâmetros da equação da superelipse, para o problema da minimização da *compliance*. a) $\sigma_1 = \sigma_2$. b) $\sigma_1 = 2\sigma_2$.

(a)				(b)			
$V[\%]$	η	a	b	$V[\%]$	η	a	b
20	11.149	0.090	0.0899	20	10.0	0.0932	0.0871
30	6.1341	0.0852	0.0851	30	7.1738	0.0899	0.0800
40	4.3173	0.0801	0.0801	40	4.5675	0.0870	0.0732
50	3.7954	0.0738	0.0736	50	3.5157	0.0839	0.0655
60	2.7886	0.0678	0.0678	60	2.9513	0.0796	0.0571
70	2.4382	0.0598	0.0598	70	2.5564	0.0734	0.0481
80	2.1951	0.0496	0.0496	80	2.2551	0.0640	0.0381
90	2.0459	0.0355	0.0355	90	2.0641	0.0484	0.0260

Tabela B.2: Parâmetros da equação da superelipse, para o problema da minimização do máximo da tensão. a) $\sigma_1 = \sigma_2$. b) $\sigma_1 = 2\sigma_2$.

(a)				(b)			
$V[\%]$	η	a	b	$V[\%]$	η	a	b
20	11.130	0.0899	0.0900	20	10.033	0.0935	0.0867
30	6.9038	0.0848	0.0849	30	7.2945	0.0903	0.0796
40	4.9739	0.0795	0.0795	40	5.0430	0.0869	0.0726
50	3.8138	0.0737	0.0737	50	4.0108	0.0833	0.0647
60	3.0352	0.0672	0.0672	60	3.1679	0.0790	0.0567
70	2.4531	0.0597	0.0597	70	2.6029	0.0729	0.0481
80	2.1722	0.0497	0.0497	80	2.2203	0.0639	0.0384
90	2.0411	0.0355	0.0355	90	2.0483	0.0482	0.0262

Tabela B.3: Parâmetros da equação da superelipse, para o problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = -\sigma_2$).

$V[\%]$	η	a	b
20	4.1776	0.3387	0.0895
30	2.6805	0.2157	0.0843
40	1.5875	0.3188	0.0795
50	1.3783	0.2975	0.0737
60	1.3694	0.2545	0.0662
70	1.4518	0.2185	0.0569
80	1.7338	0.1556	0.0458
90	2.4448	0.0767	0.0321

B.2 Parâmetros da equação da superformula

Tabela B.4: Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = \sigma_2$).

$V[\%]$	N_1	N_2	N_3	a_1	b_1	m_1
20	12.220	10.883	11.432	0.0680	0.0768	4.0
30	7.4065	6.6734	6.8713	0.0656	0.0707	4.0
40	5.4836	4.8960	4.8769	0.0594	0.0588	4.0
50	4.9550	3.9879	3.9192	0.0399	0.0377	4.0
60	5.3883	3.5093	3.5140	0.0161	0.0163	4.0
70	5.9932	3.0674	2.9756	0.0041	0.0035	4.0
80	9.9888	2.7245	2.7841	0.000016	0.000021	4.0
90	2.0030	2.0444	2.0410	0.0380	0.0378	4.0

Tabela B.5: Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização da *compliance* com estrangimentos de tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$).

$V[\%]$	N_1	N_2	N_3	a_1	b_1	m_1
20	11.020	11.013	10.991	0.0899	0.0894	4.0
30	7.0399	6.9565	6.9594	0.0824	0.0826	4.0
40	5.2505	4.9642	4.9551	0.0690	0.0688	4.0
50	4.9514	4.0047	4.0553	0.0404	0.0421	4.0
60	4.9335	3.3896	3.3805	0.020	0.0198	4.0
70	5.1789	2.9143	2.9402	0.0067	0.0070	4.0
80	9.0436	2.7222	2.7505	0.000046	0.000052	4.0
90	7.3113	2.1462	2.1444	0.000011	0.000011	4.0

B.2. PARÂMETROS DA EQUAÇÃO DA SUPERFORMULA

Tabela B.6: Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$).

$V[\%]$	N_1	N_2	N_3	a_1	b_1	m_1
20	11.673	11.666	11.655	0.0899	0.0896	4.0
30	7.0295	6.9573	6.9482	0.0828	0.0826	4.0
40	5.3082	5.0930	5.0184	0.0717	0.0691	4.0
50	4.8765	4.1059	4.0695	0.0457	0.0445	4.0
60	5.2866	3.5209	3.5248	0.0177	0.0177	4.0
70	6.9343	3.2304	3.0882	0.0024	0.0018	4.0
80	11.0	2.8239	2.8702	0.000008	0.000010	4.0
90	7.3908	2.1558	2.1472	0.000011	0.000010	4.0

Tabela B.7: Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = -\sigma_2$).

$V[\%]$	N_1	N_2	N_3	a_1	b_1	m_1
20	4.1289	4.1377	4.150	0.2296	0.0923	4.0
30	1.7853	2.0515	2.1817	0.2577	0.1319	4.0
40	2.2032	1.3409	1.9755	0.1317	0.0594	4.0
50	2.2779	1.1212	1.8055	0.0806	0.0370	4.0
60	2.2760	1.0888	1.7403	0.0610	0.0285	4.0
70	2.2605	1.5563	1.8303	0.1124	0.0288	4.0
80	2.0693	1.7025	2.0201	0.0865	0.0425	4.0
90	1.9568	1.9470	2.1168	0.0841	0.0416	4.0

Tabela B.8: Parâmetros da equação da superformula, para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = \sigma_2$), aplicando a teoria da homogeneização.

$V[\%]$	N_1	N_2	N_3	a_1	b_1	m_1
60	5.0942	3.4468	3.5551	0.2029	0.2125	4.0

B.3 Parâmetros da k-type Gielis Formula

Tabela B.9: Parâmetros da k-type Gielis Formula, com $k = 2$, para o problema da minimização da *compliance* ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).

$V[\%]$	N_{11}	N_{21}	N_{31}	a_1	b_1	m_1	N_{12}	N_{22}	N_{32}	a_2	b_2	m_2
20	16.641	15.045	14.754	0.0543	0.0466	4.0	7.2983	9.4156	9.1837	0.0507	0.0466	4.0
30	8.4330	9.4912	8.0144	0.0549	0.0323	3.9205	8.1509	7.8816	7.5687	0.0469	0.0323	3.8499
40	5.2083	4.9580	4.9182	0.0363	0.0295	3.9146	5.2613	4.7968	4.9126	0.0331	0.0295	4.0006
50	4.9145	3.7378	3.7772	0.0225	0.0165	3.9022	5.8562	5.5013	5.3820	0.0225	0.0165	3.9008
60	4.4960	2.7342	3.5203	0.0102	0.0181	3.9130	4.3134	3.3704	4.6083	0.0060	0.0181	3.9629
70	3.6852	2.8659	3.1244	0.0249	0.0219	3.9502	1.5401	1.5606	1.9117	0.0181	0.0219	3.6447
80	2.9862	2.4318	2.6505	0.0219	0.0183	3.9676	1.6163	1.7309	1.8848	0.0255	0.0183	3.9753
90	1.9950	1.9526	2.0524	0.0223	0.0147	4.0010	1.9950	1.9525	2.0523	0.0223	0.0147	4.0011

Tabela B.10: Parâmetros da k-type Gielis Formula, com $k = 2$, para o problema da minimização da *compliance* com constrangimentos de tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).

$V[\%]$	N_{11}	N_{21}	N_{31}	a_1	b_1	m_1	N_{12}	N_{22}	N_{32}	a_2	b_2	m_2
20	16.576	15.163	14.776	0.0534	0.0468	4.1417	7.2827	9.4375	9.1806	0.0575	0.0468	3.6125
30	8.0449	8.4503	7.8144	0.0497	0.0319	3.50	10.250	10.496	9.3086	0.0507	0.0319	4.2976
40	7.4672	7.8572	6.5407	0.0598	0.0271	4.0499	5.9050	4.8220	5.6974	0.0164	0.0271	3.8530
50	4.8226	3.8609	3.8267	0.0244	0.0181	3.9630	5.8444	5.5060	5.4087	0.0260	0.0181	3.9718
60	4.5262	2.7678	3.5144	0.010	0.0177	3.950	4.3376	3.3712	4.6144	0.0063	0.0177	3.9565
70	3.6835	2.8765	3.1690	0.0248	0.0222	3.9755	1.5367	1.5451	1.8457	0.0183	0.0222	3.6430
80	2.9164	2.5370	2.6718	0.0214	0.0155	3.9615	1.9619	1.8333	1.9395	0.0226	0.0155	3.9854
90	1.9324	2.0693	2.0149	0.0309	0.0156	4.020	1.9325	2.0693	2.0149	0.0309	0.0156	4.0199

Tabela B.11: Parâmetros da k-type Gielis Formula, com $k = 2$, para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$).

$V[\%]$	N_{11}	N_{21}	N_{31}	a_1	b_1	m_1	N_{12}	N_{22}	N_{32}	a_2	b_2	m_2
20	10.722	10.032	13.133	0.0274	0.0378	2.7405	13.214	14.139	11.034	0.0707	0.0378	4.4063
30	8.4070	9.5746	7.9856	0.0564	0.0322	4.4999	8.1045	7.9341	7.6082	0.0488	0.0322	3.3510
40	7.5291	8.0599	6.5941	0.0642	0.0276	4.0499	5.9045	4.9098	5.7786	0.0169	0.0276	3.8662
50	4.7016	4.0154	3.9019	0.0276	0.0207	3.9990	5.8225	5.5735	5.4981	0.0314	0.0207	3.9990
60	4.5293	2.8346	3.5317	0.0101	0.0180	3.9990	4.3241	3.3575	4.58454	0.0076	0.0180	3.9990
70	3.6898	2.8431	3.1108	0.0244	0.0213	3.9990	1.5013	1.5111	1.8032	0.0166	0.0213	3.6525
80	3.0529	2.3959	2.6078	0.0195	0.0158	3.9985	1.6329	1.7113	1.8320	0.0225	0.0158	3.9634
90	1.8219	1.8792	1.9388	0.0358	0.0242	3.9405	1.6140	2.0178	2.1385	0.0380	0.0242	4.0422

Tabela B.12: Parâmetros da k-type Gielis Formula, com $k = 2$, para o problema da minimização do máximo da tensão ($\sigma_1 = 2\sigma_2$), aplicando a teoria da homogeneização.

$V[\%]$	N_{11}	N_{21}	N_{31}	a_1	b_1	m_1	N_{12}	N_{22}	N_{32}	a_2	b_2	m_2
60	3.4351	2.9378	4.5125	0.1215	0.1680	3.9965	3.3343	1.9284	3.0762	0.0785	0.1680	3.9983

Anexo C

Minimização do máximo da tensão para um carregamento de corte

Este anexo mostra um breve estudo exploratório, para demonstrar que ao contrário do que acontece nos problemas de otimização em que se assumem carregamentos onde as tensões macroscópicas têm o mesmo sinal, os problemas que consideram materiais celulares sujeitos a carregamentos de corte não têm a mesma solução para os problemas da minimização da *compliance* e da minimização do máximo da tensão. A figura C.1 mostra para estes problemas a distribuição de tensão de von-Mises nas respectivas microestruturas ótimas considerando uma fração volúmica de material de 75%.

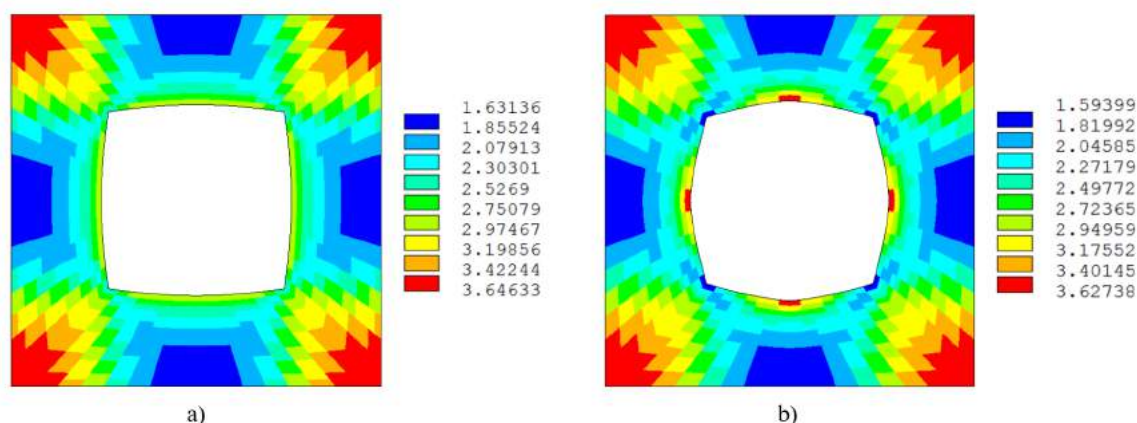


Figura C.1: Distribuição de tensão de von-Mises [MPa] obtidas considerando um carregamento de corte e utilizando a intersecção de duas superelipses para definir a forma das inclusões. a) Minimização da *compliance*. b) Minimização do máximo da tensão.

Pela análise da figura anterior conclui-se que as soluções dos dois problemas de otimização tendem para uma geometria diferente das inclusões. Verifica-se também que a microestrutura obtida através da resolução do problema da minimização da tensão apresenta uma tensão máxima de von-Mises inferior ao pico da tensão obtida no problema da minimização da *compliance*.

No trabalho publicado por Coelho, Guedes e Cardoso [11] são obtidas microestruturas ótimas de material celular através da resolução do problema da minimização do volume com constrangimentos de tensão e considerando um carregamento de corte. As microestruturas ótimas obtidas nesse trabalho resultam da diminuição do tamanho da inclusão central e da remoção de material nas zonas onde o nível da tensão é mais reduzido. Assim de modo a resolver o problema da minimização do máximo da tensão considerou-se que o *desing* inicial da célula de base era formado por uma inclusão central e quatro inclusões na fronteira desta. A figura C.2 mostra a distribuição de tensão de von-Mises resultante da resolução do problema da minimização do máximo da tensão considerando este *design* inicial e uma fração volúmica de material de 60%.

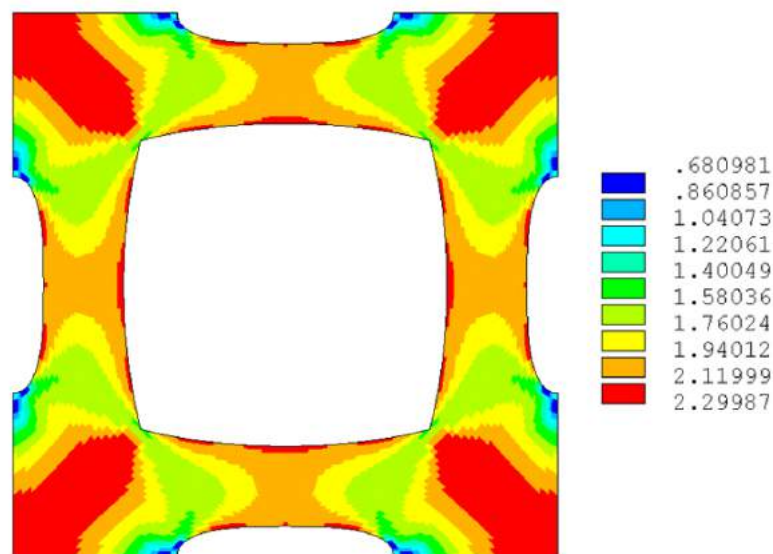


Figura C.2: Distribuição de tensão de von-Mises [MPa] obtida considerando um carregamento de corte e utilizando a intersecção de duas superformulas para definir a forma da inclusão central e uma superformula para definir as inclusões da fronteira.

Comparando a distribuição de tensão de von-Mises da figura anterior com a distribuição de tensão de von-Mises das tabelas 5.5 e 5.6 do capítulo 5 para uma fração volúmica de material de 60% conclui-se a introdução das inclusões na fronteira da célula de base faz com que o valor máximo da tensão de von-Mises seja reduzido para menos de metade.